數理化自學叢書

平面幾何

第二册

香港三育圖書文具公司 出版

數理化自學叢書

平面幾何

第二册

香港三育圖書文具公司出版

數理化自學叢書

平面幾何

（第二冊）

出版發行：三育圖書文具公司
香港九龍柯士甸道三十三號二樓
San Yu Stationery & Publishing Co.
33, Austin Road, 1/F., Kowloon, Hong Kong.

印刷：金冠印刷有限公司
香港北角英皇道499號北角工業大厦六樓B座

1978年8月版

目　录

第一章 相 似 形

成比例的綫段

§1·1 綫 段 的 比

1. 綫段的度量 为了要知道竹竿的长度，我們就用尺去量．这里所謂“量”，就是把一把尺的一端和竹竿的一端对齐，然后把这把尺紧密地沿着竹竿一尺接一尺地比較，最后得到了竹竿的长度．例如5尺，这表示从长度来讲，竹竿是尺的五倍(图1·1)．

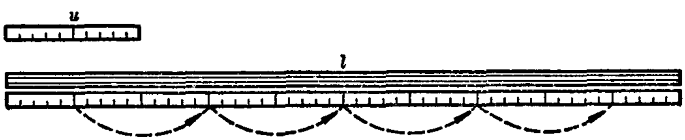


图 1·1

用几何的观点来研究，尺和竹竿可以分別看做是綫段 u 和 l；用尺量竹竿的过程，可以看做是用綫段 u 去量綫段 l，得出綫段 l 含有綫段 u 多少倍的过程．这里綫段 u 叫做**长度单位**，綫段 l 是**被度量的綫段**，最后所得的倍数叫做**量数**．說得更确切一些，它是以綫段 u 作长度单位去量綫段 l 所得的量数．綫段的量数和綫段的长度是有区別的：量数只是一个正数，量数后面注明了长度单位才是长度．在前面的实例中，“5”是以尺作长度单位去量竹竿所得的量数，“5尺”才是竹竿的长度．度量綫段的目的就是要得到一个量数．要得到綫段的量数首先要选定作为长度单位的綫段．用两种不同的长度单位先后去度量同一条綫段，所得的两个量数显

然是不等的．例如用市尺作单位去量綫段 l，如果所得的量数是 6，用 m(米尺)作单位去量同一綫段，所得的量数就是 2 了．

但是，用綫段 u 量綫段 l 和用尺量竹竿毕竟有些不同．給定了两条綫段 u 和 l 的图形之后，我們很难想象，在图形上“拿起”綫段 u，紧貼着綫段 l，对齐了两端，一次接一次地进行比較．这里就得利用分割規了．首先把分割規两脚的两个尖端分别放在綫段 u 的两个端点上(图 1·2(1))，然后保持分割規两脚張口的大小，把一个脚的尖端放在綫段 l 的一个端点 A 上，依着图 1·2(2) 虛綫所指的方向，在綫段 l 上，連續截取等于 u 的綫段 $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \cdots$，这样就在图形上进行了用綫段 u 度量綫段 l 的过程．

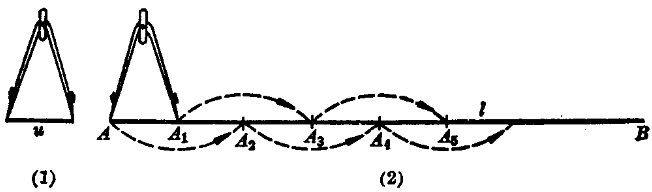


图 1·2

用尺量竹竿是一件十分簡单的事，但不能因此把綫段的度量問題也理解为簡单的問題．用长度单位 u 去截綫段 l 是否一定截得尽？截不尽怎么办？度量綫段所得的量数究竟是怎样的数？这些問題都是比較复杂的．下面我們将詳細地、精确地来研究它們．

图 1·3 中，綫段 u 是长度单位，綫段 AB 是要度量的綫段．現

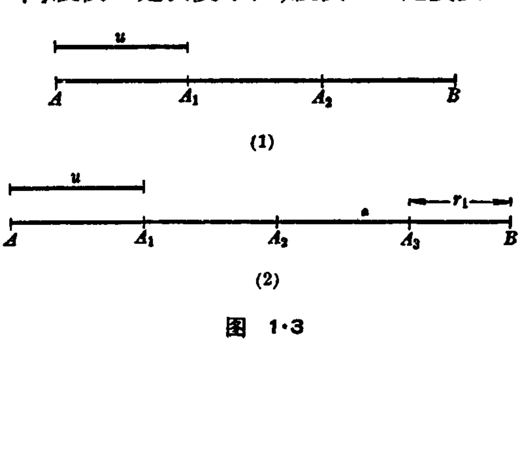


图 1·3

在利用分割規在綫段 AB 上，从端点 A 起，連續截取等于 u 的綫段 AA_1，A_1A_2，A_2A_3，…．这样截取的結果总不出下面两种情况中的一种：

(1) 截了 m 次以后(这里 m 是一个自然数)，恰巧截尽(图 1·3(1))；

(2) 截了 m 次以后，得到了小于 u 的剩余綫段 r_1(图 1·3(2))．

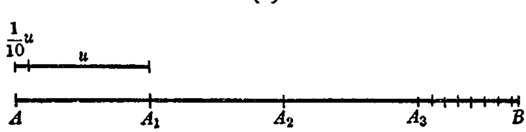
对于第一种情况，綫段 AB 恰巧是綫段 u 的整数倍．所得的量数是一个正整数 m．在图 1·3(1) 里，$m=3$．度量綫段 AB 的过程到此結束．

对于第二种情况，綫段 AB 的量数还沒有确定，只知道它的量数应当大于正整数 m，但是小于正整数 $m+1$．在图 1·3(2) 里，綫段 AB 的量数大于 3 而小于 4，度量的过程还沒有結束．我們把它叫做第一回截取．在第一回截取里所得的剩余綫段是 r_1．为了进一步确定綫段 AB 的量数，我們可以采用比 u 小的綫段作长度单位，继續度量綫段 r_1．

現在用綫段 u 的 $\frac{1}{10}$ 作单位来度量剩余綫段 r_1，从綫段 r_1 的左端起，用分割規連續截取等于 $\frac{1}{10}u$ 的綫段，截取的結果总不出下面的两种情况之一：

(1) 截了 m_1 次以后，綫段 r_1 恰巧被截尽(图 1·4(1))．

(1)



(2)

图 1·4

(2) 截了 m_1 次以后，得到了小于 $\frac{1}{10}u$ 的剩余綫段 r_2（图 1·4(2)）.

对于第一种情况，綫段 r_1 恰巧是綫段 $\frac{1}{10}u$ 的整数 m_1 倍，这里 m_1 可以等于从 1 到 9 的任何一个正整数．这时綫段 AB 的量数已經确定为有限小数 $m+\frac{m_1}{10}$. 在图 1·4(1) 里 $m+\frac{m_1}{10}=3.7$. 度量綫段 AB 的过程到此結束.

对于第二种情况：綫段 AB 的量数仍旧沒有确定，只知道它的量数大于 $m+\frac{m_1}{10}$ 而小于 $m+\frac{m_1+1}{10}$，这里 m_1 可以等于 0 $\left(如果\ r_1<\frac{1}{10}u\right)$，也可以等于从 1 到 9 的任何一个正整数 $\left(如果\ r_1>\frac{1}{10}u\right)$. 在图 1·4(2) 里，綫段 AB 的量数大于 3.7 而小于 3.8. 度量綫段 AB 的过程还沒有結束，我們把这一回的截取叫做第二回截取．在第二回截取里所得的剩余綫段是 r_2. 为了更进一步确定綫段 AB 的量数，我們可以采用比 $\frac{1}{10}u$ 小的綫段作长度单位，继續度量綫段 r_2.

綫段的度量就是这样进行的．从上面的討論，可以得到度量綫段的初步結論：用长度单位 u 去度量綫段 l. 如果綫段 l 恰巧被 u 所截尽，那末綫段 l 的量数是一个正整数；如果截不尽，那末再用 $\frac{1}{10}u$, $\frac{1}{100}u$, $\frac{1}{1000}u$, … 做长度单位分别去截第一回剩余綫段 r_1，第二回剩余綫段 r_2，第三回剩余綫段 r_3，…．如果某一回的剩余綫段恰巧被截尽，那末綫段 l 的量数是一个正有限小数.

用綫段 u, $\frac{1}{10}u$, $\frac{1}{100}u$, … 分别去截綫段 l，第一回剩余綫段 r_1，第二回剩余綫段 r_2，…，会不会每截一次总有剩余，綫段的度量过程将无限止地进行下去呢？下面的两个例題将說明这个問題.

例 1. 用綫段 AB 作长度单位去量綫段 CD，所得的量数是 $+3$，研究用綫段 CD 作长度单位去度量綫段 AB 的度量过程（图 1·5）.

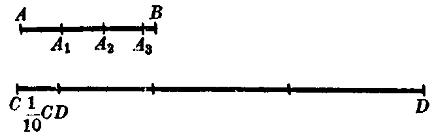


图 1·5

【解】 依照題意，綫段 CD 含有綫段 AB 的 3 倍．显然 $CD>AB$．用 CD 作长度单位去度量 AB 时，第一回就得用 $\frac{1}{10}CD$ 去截 AB.

因为 $AB-3\cdot\frac{1}{10}CD=AB-3\cdot\frac{1}{10}\cdot3AB=\frac{1}{10}AB$，所以用 $\frac{1}{10}CD$ 去截 AB，截了 3 次而得到第一回剩余綫段 $\frac{1}{10}AB$.

因为 $\frac{1}{10}AB-3\cdot\frac{1}{100}CD=\frac{1}{10}AB-3\cdot\frac{1}{100}\cdot3AB=\frac{1}{100}AB$，所以用 $\frac{1}{100}CD$ 去截第一回剩余綫段 $\frac{1}{10}AB$，截了 3 次而得第二回剩余綫段 $\frac{1}{100}AB$.

因为 $\frac{1}{100}AB-3\cdot\frac{1}{1000}CD=\frac{1}{100}AB-3\cdot\frac{1}{1000}\cdot3AB=\frac{1}{1000}AB$，所以用 $\frac{1}{1000}CD$ 去截第二回剩余綫段 $\frac{1}{100}AB$，截了 3 次而得第三回剩余綫段 $\frac{1}{1000}AB$.

……………………

度量的过程将无限地继續下去，所得的量数是一个循环小数 $0.333\cdots$.

例 2. 在等腰直角三角形 ABC 里，腰 AC 的长度是一寸．現在以寸作长度单位，求斜边 AB 的量数（图 1·6）.

【解】 我們将利用計算三角形面积的方法来求得 AB 的量数①．作斜边 AB 上的高 CD（图 1·6(1)）．因为三角形 ABC 是等

① 在算术里已經学习过計算三角形面积的方法．三角形的面积等于底和高乘积的一半

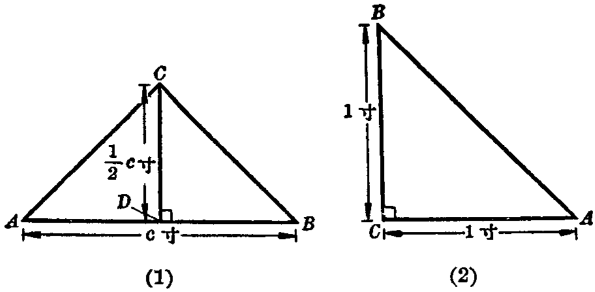


图 1·6

腰的，所以 CD 又是斜边上的中綫，从而 $AD=\frac{1}{2}AB$. 容易看出，直角三角形 ACD 也是等腰的，所以 $CD=AD$, $CD=\frac{1}{2}AB$. 設 AB 的长度为 c 寸，这里 c 是它的量数，则 CD 的长度是 $\frac{1}{2}c$ 寸. 依据三角形面积公式：

$$\text{三角形 } ABC \text{ 的面积}=\frac{1}{2}\cdot c\cdot\frac{c}{2}=\frac{1}{4}c^2\ (\text{平方寸}). \tag{1}$$

但是直角三角形 ABC 的直角边 AC, BC 可以分别做三角形的底边和高(图 1·6(2)). 因为 AC, BC 的长度都是一寸，所以

$$\text{三角形 } ABC \text{ 的面积}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}\ (\text{平方寸}). \tag{2}$$

由(1), (2)两式，得

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}c^2,\quad c^2=2,\quad \therefore\quad c=\sqrt{2}$$

这里斜边 AB 的量数是一个无理数 $\sqrt{2}$，它是一个无限不循环小数，开头几位数字是 $1.4142\cdots$. 这表示用綫段 AC 去截 AB，截了 1 次而得剩余綫段 r_1；用綫段 $\frac{1}{10}AC$ 去截 r_1，截了 4 次而得剩余綫段 r_2；用綫段 $\frac{1}{100}AC$ 去截 r_2，截了 1 次而得 r_3；…. 度量的过程将无限止地继續下去.

从前面的两个例题可以知道：度量綫段的过程有时将无限止地继續下去，这时綫段的量数可能是一个正的循环小数，也可能是

一个正的无理数(无限不循环小数).

一般地説,在选定了长度单位綫段之后,每一条綫段总有一个量数,这量数可能是正整数、正有限小数、正循环小数或正无限不循环小数. 在代数学里,把整数、分数(有限小数、循环小数)叫做**有理数**,把无限不循环小数叫做**无理数**;有理数和无理数总称**实数**. 因此我們有下面的結論:以确定的长度单位綫段去度量任意綫段,总有一个确定的正实数作为它的量数.

2. 两条綫段的比 給定了两个数 a 和 b,要想知道 a 是 b 的多少倍($a>b$),或者 a 是 b 的几分之几($a<b$),我們可以用 b 去除 a. 所得的商叫做 a 和 b 两数的**比**;这里被除数 a 叫做比的**前項**,除数 b 叫做比的**后項**. 两个数 a 和 b 的比通常表达为 $\frac{a}{b}$ 的形式,或者 $a:b$ 的形式.

两个数的比的概念可以推广到两条綫段的比.

用同一长度单位去量两条綫段,所得的两个量数的比叫做这两条綫段的比.

在图1·7里,綫段 EF 是长度单位,用 EF 分别去量綫段 AA' 和 BB',必然得到两个量数 a 和 b. 量数 a 和 b 的比就是綫段 AA' 和 BB' 的比,并且表达为 $\frac{AA'}{BB'}=\frac{a}{b}$,或者 $AA':BB'=a:b$. 在图1·7里,显然有 $\frac{AA'}{BB'}=\frac{6}{11}$.

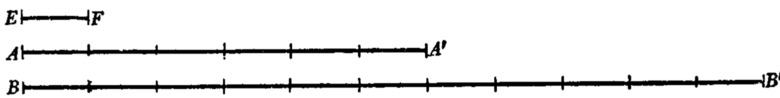


图 1·7

确定綫段的量数必須首先确定长度单位. 长度单位改变了,一条綫段的量数也跟着改变. 例如用尺做长度单位量竹竿,如果量数是5;长度单位改用了寸,这根竹竿的量数就变为50了.

綫段的量数旣由所选的长度单位确定;两綫段的比又由两綫

段的量数确定，那末，改变了长度单位，两綫段的比是否也要改变呢？

假設用寸作长度单位，两条綫段的量数分别为 50 和 30. 改用尺作长度单位后，它們的量数分别改变为 5 和 3 了. 改用分作长度单位后，它們的量数又分别改变为 500 和 300. 我們先后采用尺，寸，分作长度单位，两綫段的比先后为：$\frac{5}{3}$，$\frac{50}{30}$ 和 $\frac{500}{300}$，它們是相等的. 由此可見，每改变一次长度单位，两条綫段的量数各扩大或縮小同样的倍数，对于两綫段的比来讲，正好把它的前項和后項扩大或縮小同样的倍数，比的值是不会改变的. 因此，两綫段的比和所采用的长度单位沒有关系.

例 3. 綫段 AB 和 CD 的长度分别为 2.1 尺和 1.4 米. 求两綫段 AB 和 CD 的比. 如果用 CD 作长度单位，求出綫段 AB 的量数.

【解】 要求 AB 与 CD 的比，首先要使它們的长度单位相同. CD 的长度 1.4 米 $=4.2$ 尺，所以 $\frac{AB}{CD}=\frac{2.1}{4.2}=0.5$.

用 CD 作长度单位去度量綫段 AB，所得的量数 a，就是綫段 AB 含有綫段 CD 的倍数，所以 $a=\frac{2.1}{4.2}=0.5$.

从这个例題可以知道，两綫段 AB，CD 的比，也可以理解为以綫段 CD 作长度单位去度量綫段 AB 所得的量数.

习 題 1·1

1. 一条綫段的量数一定是有理数嗎？并举出例子.

2. 綫段 a 和长度单位 l 分别含有第三綫段 c 的 54 倍和 15 倍，求出綫段 a 的量数.

3. 用圓規和直尺任意作一个正方形和正三角形；再利用分割規截取相等綫段的方法，証明：

(1) 以正方形的一边为长度单位，量它的对角綫所得的量数，精确到 0.1

的时候是 1.4.

(2) 以正三角形一边为长度单位，量它的高所得的量数，精确到 0.1 的时候是 0.8.

4. "綫段"和"綫段的长度"是一样的嗎？为什么？

5. 綫段 a 和 b 的长度分别是 5 厘米和 4 厘米，求出它們的比. 如果改用 1 寸长的綫段为长度单位时，它們的量数分别是多少？它們的比有沒有变化？

6. 什么是两綫段之比？它一定是有理数嗎？上题中，如果采用綫段 b 做长度单位，两綫段之比如何？

7. 把一条长 56 厘米的綫段分成 1:2:3 的三段，然后求出每一个分点把全綫段分成两部分的比.

8. 点 C 把綫段 AB 分成 $AC:CB=2:3$. 已知 AB 为 48 厘米，求 AC 和 CB 的长.

9. 如果 $AB=12$ cm，那末延长几厘米后可以使得 $AC:BC=5:2$? 这里 C 是延长綫的終点.

10. 綫段 AB 被点 C 分成 $AC:CB=3:2$，求 AC 和 AB 的比，以及 AB 和 CB 的比.

§1·2 成比例的綫段

在算术里，我們已經学习过关于比例的概念，比例是表示两个比相等. 如果两个数 a 和 b 的比等于另外两个数 c 和 d 的比，那末我們說四个数 a, b, c, d 組成一个比例 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，或 $a:b=c:d$.

在等式 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 里，a, d 叫比例的**外項**，b, c 叫比例的**內項**，d 叫做 a, b, c 的**第四比例項**.

如果 a 和 b 的比等于 b 和 c 的比，即 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，那末 b 叫做 a 和 c 的**比例中項**.

四个数組成比例的概念，可以推广为四条綫段組成比例的概念.

如果綫段 a 和 b 的比等于綫段 c 和 d 的比，綫段 a, b, c, d

叫做**成比例的綫段.**

在图 1·8 中，綫段 a 和 b 的比等于 $\frac{4}{7}$，綫段 c 和 d 的比也等于 $\frac{4}{7}$. 所以綫段 a, b, c, d 是成比例的綫段.

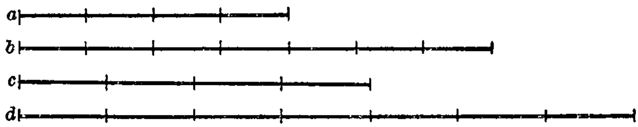


图 1·8

例 1. 在图 1·9 中，DE, $D'E'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的中位綫. 試証綫段 BC, DE, $B'C'$, $D'E'$ 是成比例的綫段.

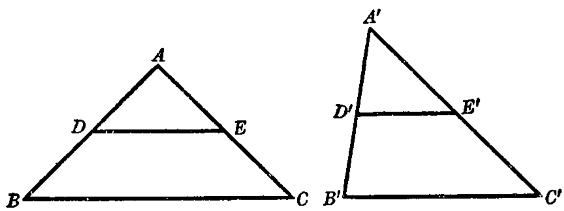


图 1·9

已知 DE, $D'E'$ 分别为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的中位綫.

求証 $\frac{BC}{DE}=\frac{B'C'}{D'E'}$.

【証】 因为 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位綫，BC 是底边，所以 $BC=2DE$，或 $\frac{BC}{DE}=2$.

同理可証：$\frac{B'C'}{D'E'}=2$. 从而 $\frac{BC}{DE}=\frac{B'C'}{D'E'}$.

依据两綫段的比的定义：两綫段的比是用同一长度单位去量两条綫段所得的量数的比，四条綫段組成的比例实际上是它們的四个量数所組成的比例. 因此关于数的比例的各个性质完全适用于綫段的比例.

下面是关于比例的一些主要性质的定理. 在定理里的所有字

母都代表不等于零的实数. 有些定理比較簡单,讀者可参閱括号里的提示,自己証明.

定理 1 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 那末 $ad=bc$ $\left(\text{即将等式 } \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ 的两端各乘以 } bd\right)$.

定理 2 如果 $ad=bc$, 那末可以以 a 和 d 为比例外項(或者比例內項), 以 b 和 c 为比例內項(或者比例外項)組成比例(即以 db 除等式 $ad=bc$ 的两端).

定理 3 (反比定理) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 那末 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ $\left(\text{把等式 } \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ 两端各乘以 } bd\text{, 再各除以 } ac\right)$.

定理 4 (更比定理) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 那末 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ $\left(\text{把等式 } \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ 的两端各乘以 } \frac{b}{c} \text{ 或 } \frac{d}{a}\right)$.

定理 5 (合比定理) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 那末 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

求証 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

【証】 $\because$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\therefore$ $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$. 通分相加,得

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

定理 6 (分比定理) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 那末 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ $\left(\text{把等式 } \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ 的两端各减 } 1\text{, 再通分}\right)$.

定理 7 (等比定理) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$, 那末

$$\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=\frac{a}{b}.$$

已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$.

求証 $\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=\frac{a}{b}$.

【証】 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=k$，那末

$$a=bk,\quad c=dk,\quad e=fk,\ \cdots.$$

因此
$$\begin{aligned}\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}&=\frac{bk+dk+fk+\cdots}{b+d+f+\cdots}\\&=\frac{k(b+d+f+\cdots)}{b+d+f+\cdots}\\&=k=\frac{a}{b}.\end{aligned}$$

例 2. 綫段 a，b，c，d 的长度分别为 (1) 2cm，$1\frac{1}{2}$cm，$5\frac{1}{4}$cm，7cm；(2) 5cm，$\frac{2}{3}$cm，$\frac{3}{2}$cm，$\frac{1}{5}$cm. 如果它們可以組成比例，写出这些比例的一个.

【解】 (1) 先把四条綫段的长度按大小次序排列起来：

$$b=1\frac{1}{2}\text{cm},\quad a=2\text{cm},\quad c=5\frac{1}{4}\text{cm},\quad d=7\text{cm}.$$

再求第一第二和第三第四两对綫段的比：

$$b:a=1\frac{1}{2}:2=3:4.$$

$$c:d=5\frac{1}{4}:7=3:4.$$

可見它們是成比例的綫段，$1\frac{1}{2}:2=5\frac{1}{4}:7$ 是所成的一个比例.

(2) 先把四条綫段的长度按大小次序排列起来：

$$d=\frac{1}{5}\text{cm},\quad b=\frac{2}{3}\text{cm},\quad c=\frac{3}{2}\text{cm},\quad a=5\text{cm}.$$

再求第一第四和第二第三两对綫段的长度的积：

$$da=\frac{1}{5}\cdot 5=1.$$

$$bc=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1.$$

$$\therefore\quad da=bc.$$

依据定理 2 可知，它們是成比例的綫段，$\frac{1}{5}:\frac{2}{3}=\frac{3}{2}:5$ 是所成的一个比例.

例 3. 从等式 $4y-3x=0$，求 $x:y$；$(x+y):y$；$(x-y):y$；$(x+y):(x-y)$.

【解】 从等式 $4y-3x=0$ 得 $3x=4y$.

依据比例性质定理 2，把 x，3 写作一个比例的外項；y，4 写作这个比例的內項，即

$$x:y=4:3. \tag{1}$$

对(1)式应用合比定理：

$$(x+y):y=7:3. \tag{2}$$

对(1)式应用分比定理：

$$(x-y):y=1:3. \tag{3}$$

把(3)式除(2)式：

$$(x+y):(x-y)=7:1.$$

例 4. 在图 1·10 中，已知 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$，$AB=3.0\,\text{cm}$，$BC=5.6\,\text{cm}$，$AC=5.0\,\text{cm}$. 求 BD 和 DC 的长.

【解】 对已知比例

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

应用合比定理，得

$$\frac{AB+AC}{AC}=\frac{BD+DC}{DC}.$$

即 $$\frac{8}{5}=\frac{BC}{DC}.$$

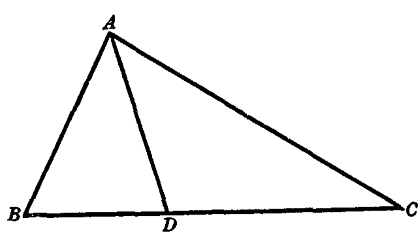


图 1·10

从此得 $$DC=BC\times\frac{5}{8}=5.6\times\frac{5}{8}=3.5\,(\text{cm}).$$

$$BD=BC-DC=5.6-3.5=2.1\,(\text{cm}).$$

例 5. 已知 $\frac{x}{2}=\frac{y}{7}=\frac{z}{5}$，求 $\frac{x+y+z}{z}$；$\frac{x+z}{y}$；$\frac{x+y-z}{x}$.

【解】 应用等比定理得 $\frac{x+y+z}{2+7+5}=\frac{z}{5}$，也就是 $\frac{x+y+z}{14}=\frac{z}{5}$，从而 $\frac{x+y+z}{z}=\frac{14}{5}$.

应用等比定理得 $\frac{x+z}{2+5}=\frac{y}{7}$，也就是 $\frac{x+z}{7}=\frac{y}{7}$，从而

$$\frac{x+z}{y}=1.$$

$$\because\quad \frac{z}{5}=\frac{-z}{-5},\qquad \therefore\quad \frac{x}{2}=\frac{y}{7}=\frac{-z}{-5}.$$

应用等比定理得

$$\frac{x+y-z}{2+7-5}=\frac{x}{2},\quad 即\quad \frac{x+y-z}{4}=\frac{x}{2},$$

从而

$$\frac{x+y-z}{x}=2.$$

习 题 1·2

1. 已知两条綫段 a 和 b. 求証綫段 ma，mb，$\frac{a}{n}$ 和 $\frac{b}{n}$ 四綫段成比例，这里的 m 和 n 都是正的有理数.

2. 把下列各比例式的每項都相应变动位置，写出各种不同形式的比例式来：

(1) $3:x=4:8$;　　(2) $x:5=3:10$;

(3) $x:7=2:21$;　　(4) $n:x=m:a$.

3. 已知下列各数，試分别求出它們的第四比例項：

(1) 1, 2 和 3;　　(2) 2, 1 和 3;

(3) m, n 和 p;　　(4) a, b 和 c.

4. 如果对于已知的綫段 a, b, c, d 和 l 成立比例式：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，$\frac{a}{b}=\frac{c}{l}$，証明綫段 d 与 l 是相等的.

5. 从下列各式中，分别求出 x 和 y 的比：

(1) $9x=2y$; (2) $6x=y$;

(3) $mx=ny$; (4) $4x-6y=0$;

(5) $ax-ay=bx-by$.

6. 如果三綫段 a, b 和 c 成立比例式 $a:b=b:c$, 証明 $b=\sqrt{ac}$.

7. 按照下列各条件，分别写出两个数的比例中项 x:

(1) 9 和 4; (2) 1 和 16;

(3) $2a$ 和 $32a$; (4) $\frac{4}{3}$ 和 $\frac{25}{3}$;

(5) $3b^2$ 和 $9a^2$.

8. 求下列各比例式中的 x:

(1) $2:3=5-x:x$; (2) $a:b=2-x:x$;

(3) $5+x:x=7:5$; (4) $3+x:x=a:b$.

9. 已知四条綫段 $a=\frac{11}{7}$ cm, $b=\frac{13}{5}$ cm, $c=\frac{33}{7}$ cm, $d=\frac{39}{5}$ cm, 这四条綫段是否成比例? 为什么?

*10. 已知綫段 AB 上有一点 P, 使 $AP:PB=m:n$. 証明点 P 是唯一的.

[提示：假設 AB 上还有一点 P', 也有 $AP':P'B=m:n$, 看結果会怎样?]

*11. 已知綫段 AB 的延长綫上有一点 Q, 使 $AQ:BQ=m:n(m>n)$. 証明点 Q 也是唯一的.

12. 如果已知各綫段成比例: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}$. 証明 $\frac{aa'}{bb'}=\frac{cc'}{dd'}$.

13. 在下列各式中，分别求出綫段 x 和 y 的比:

(1) $(x+y):y=5:4$; (2) $(x+y):(x-y)=6:2$;

(3) $(2y+3x):(5y-2x)=8:3$; (4) $\frac{x-a-c}{y-b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

14. 已知綫段 DE 分别交 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 于 D 和 E, 并且 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. 証明: (1) $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$; (2) $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

15. 已知 M 是綫段 AB 上的一个分点，如果:

(1) $AM:MB=1:2$; (2) $AM:MB=m:n$.

分别求出 $AM:AB$ 和 $MB:AB$ 的值.

16. 如果四綫段間成比例: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 証明 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, 或 $\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$.

17. 已知 C 是綫段 AB 上的一点，D 是 AB 延长綫上的一点，并且 $AD:DB=AC:CB$. 如果 $AB=6\,\text{cm}$，$AC=3.6\,\text{cm}$，求 AD 和 DB 的长.

18. 在四边形 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 中，已知 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}=\frac{3}{5}$，$AB+BC+CD+DA=12.6\,\text{cm}$. 求四边形 $A'B'C'D'$ 的周长.

19. 在綫段 AB 上有一点 C，已知 AC 的长为 48 厘米. $AC:CB=2:3$. 求 AB 和 CB 的长.

20. 已知三綫段 a, b, c 的长分别是 1 厘米，2 厘米和 5 厘米，并且 a, b, c, d 四綫段成比例. 綫段 d 长多少?

§1·3 平行綫截得比例綫段定理

現在我們来研究，平行于三角形一边的直綫，在其他两边上所截得綫段之間的关系.

1. 平行綫截得比例綫段定理 1 平行于三角形一边的直綫，在其他两边上截得的对应綫段成比例.

已知 在 $\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，DE 分别在 AB 和 AC 上截得綫段 AD, DB 和 AE, EC（图 1·11）.

求証 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

【証】 在 §1·1 里指出过：綫段 AD 和 DB 的比也可以看做以綫段 DB 作长度单位去量 AD 所得的量数；一条綫段的量数可能是有理数，也可能是无理数. 現在設 $\frac{AD}{DB}$ 是一个有理数，即 $\frac{AD}{DB}=\frac{m}{n}$，这里 m, n 是两个互质的正整数. 这表示綫段 AD 含有綫段 a 的 m 倍，綫段 DB 含有綫段 a 的 n 倍. 在图 1·11 中，$m=5$, $n=3$. 今把綫段 AD 和 DB 分别分成 m 和 n 个等分，經过每一个分点和

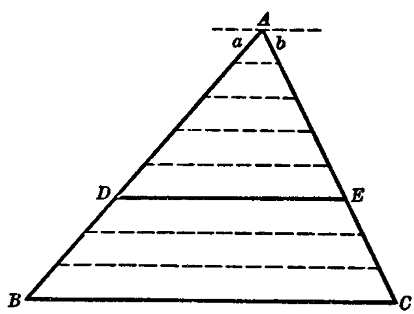


图 1·11

三角形顶点 A 各作 BC 的平行綫. 因为 $DE /\!/ BC$, 所以 DE 也和所作的平行綫平行. 这些平行綫既在綫段 AB 上截了 $m+n$ 条相等的綫段 a, 在綫段 AC 上一定也截得 $m+n$ 条相等的綫段 b, 即 $AE=mb$, $EC=nb$. 从而 $\frac{AE}{EC}=\frac{m}{n}$.

$$\therefore \quad \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

当 AD 和 DB 的比是一个无理数时,証明 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ 的过程要复杂一些,因此这里略而不証了.

讀者如果有兴趣,可以参考下面的例題. 这个例題实际上闡明了当 $\frac{AD}{DB}$ 是无理数时,証明 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ 的方法.

例 設在 $\triangle ABC$ 中, $DE /\!/ BC$, 并且 $AD:DB=1:\sqrt{2}$, 試說明 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ (图 1·12).

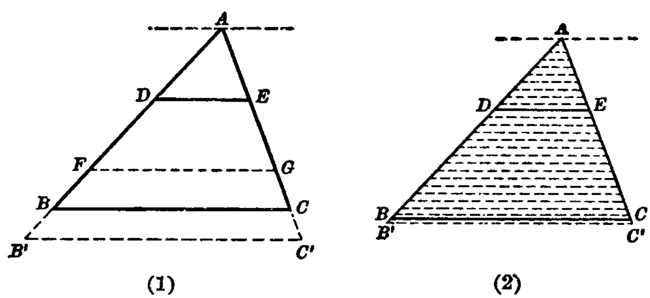


图 1·12

【解】 从已知 $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 显然有 $\frac{DB}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{1}$, 这里 $\sqrt{2}$ 是一个无理数. 下面是无理数 $\sqrt{2}$ 的近似值:

精确度	1,	$\frac{1}{10}$,	$\frac{1}{100}$,	$\frac{1}{1000}$,	$\frac{1}{10000}$,	…
$\frac{DB}{AD}$ 的不足近似值	1,	1.4,	1.41,	1.414,	1.4142,	…
$\frac{DB}{AD}$ 的过剩近似值	2,	1.5,	1.42,	1.415,	1.4143,	…

现在我們准备說明对应于各級相同的精确度，$\frac{EC}{AE}$ 和 $\frac{DB}{AD}$ 有完全相等的不足近似值和相等的过剩近似值；从而断定 $\frac{EC}{AE}=\sqrt{2}$，即 $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$.

首先在 DB 上截取等于 AD 的綫段. 由于 $1<\frac{DB}{AD}<2$，因此在 DB 上截了一次(截点为 F) 而有余，截两次又不足(第二次的截点 B' 在 DB 的延长綫上)(图 1·12(1)). 經过分点 F, B' 引 DE 的平行綫，这組平行綫在綫段 AC 上截得 $AE=EG=GC'$, C' 是在 AC 的延长綫上. 这里显然有 $AE<EC<2AE$，即 $1<\frac{EC}{AE}<2$. 所以当精确度为 1 时，$\frac{DB}{AD}$ 和 $\frac{EC}{AE}$ 有相等的不足近似值和相等的过剩近似值.

接着以 $\frac{1}{10}AD$ 作长度单位，在 AD 和 DB 上截取等于 $\frac{1}{10}AD$ 的綫段. 显然在 AD 上正好截 10 次. 由于 $1.4<\frac{DB}{AD}<1.5$，因此在 DB 上截了 14 次而有余，截 15 次又不足(第 15 次的截点 B' 在 AB 的延长綫上)(图 1·12(2)). 过这些分点作 DE 的平行綫，这一組平行綫把 AE 分成 10 个等分，在 EC 上截了 14 个 $\frac{1}{10}AE$ 而有余，截 15 个 $\frac{1}{10}AE$ 又不足(第 15 次截点 C' 在 AC 的延长綫上). 这里显然有 $14\cdot\frac{1}{10}AE<EC<15\cdot\frac{1}{10}AE$，即 $1.4<\frac{EC}{AE}<1.5$. 所以当精确度为 $\frac{1}{10}$ 时 $\frac{DB}{AD}$ 和 $\frac{EC}{AE}$ 有相等的不足近似值和相等的过剩近似值.

接着依次用 $\frac{1}{100}AD$, $\frac{1}{1000}AD$, $\frac{1}{10000}AD$, … 作长度单位，用完全相同的方法，可以說明当精确度分别为 $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, … 时，$\frac{DB}{AD}$ 和 $\frac{EC}{AE}$ 都有相等的不足近似值和相等的过剩近似值.

这样就証明了 $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$. 由反比定理，得 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

推論 平行于三角形一边的直綫截其他两边，一边和这边上的一条綫段与另一边和另一边上的对应綫段成比例.

已知 在 $\triangle ABC$ 中，$DE /\!/ BC$，DE 分别截 AB 和 AC 于 D 和 E (图 1·13).

求証 $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$ 或 $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

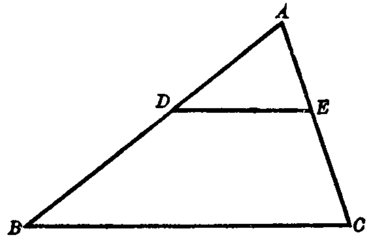


图 1·13

【証】 $\because DE /\!/ BC$, 由上面定理得

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

$$\therefore\quad \frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC}\text{（合比定理）}.$$

即

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}.$$

再从 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，由反比定理得 $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$. 由合比定理，得 $\frac{DB+AD}{AD}=\frac{EC+AE}{AE}$，即 $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

注意 平行綫截得比例綫段定理1和它的推論是判定四条綫段成比例的主要依据，在以后的証明和演題中經常要用到.

例1. 在 $\triangle ABC$ 中，$DE /\!/ BC$，$EF /\!/ CD$. 証明 AD 是 AF 和 AB 的比例中項(图 1·14).

已知 在 $\triangle ABC$ 中，

$DE /\!/ BC$, $EF /\!/ CD$.

求証 $\frac{AF}{AD}=\frac{AD}{AB}$.

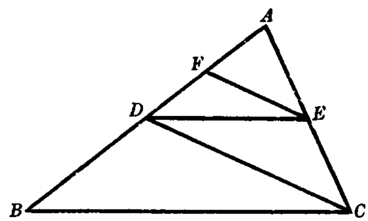


图 1·14

【証】 在 $\triangle ABC$ 中，

$\because DE /\!/ BC$, 由前面的推論得

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}. \tag{1}$$

在 $\triangle ADC$ 中，$\because EF /\!/ CD$，由前面的推論得

$$\frac{AD}{AF}=\frac{AC}{AE}. \tag{2}$$

由(1)式和(2)式得

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{AF}.$$

再由更比定理，得

$$\frac{AF}{AD}=\frac{AD}{AB}.$$

例 2. 在 $\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，$DF \parallel AC$. $AE=3\text{cm}$，$AC=5\text{cm}$，$BC=10\text{cm}$. 求 BF 和 CF 的长(图 1·15).

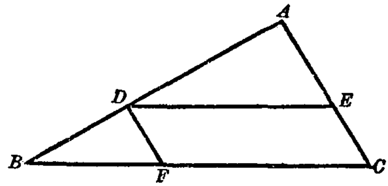


图 1·15

【解】 $\because\ DE \parallel BC$，

$$\therefore\ \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{3}{5}. \tag{1}$$

$\because\ DF \parallel AC$，

$$\therefore\ \frac{AD}{AB}=\frac{FC}{BC}. \tag{2}$$

由(1)式和(2)式得

$$\frac{3}{5}=\frac{FC}{10}.$$

从而 $$FC=10\times\frac{3}{5}=6\ (\text{cm}).$$

$$BF=10-6=4\ (\text{cm}).$$

答：BF 和 CF 的长分别为 4 厘米和 6 厘米.

2. 逆定理 如果一条直綫截三角形的两边所得的对应綫段成比例，那末这条直綫平行于第三边.

已知 在 $\triangle ABC$ 中，直綫 DE 分别截 AB 和 AC 于 D 和 E，且 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ (图 1·16).

求証 $DE \parallel BC$.

【証】 过 D 作 BC 的平行綫 DE'，DE' 截 AC 于 E'.

由平行綫截得比例綫段定理1的推論，得

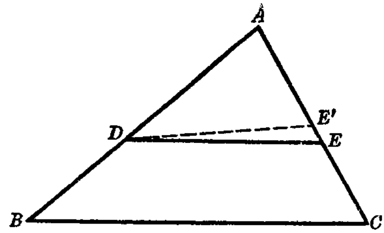


图 1·16

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{E'C}. \qquad (1)$$

但是根据已知 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，

即有

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}. \qquad (2)$$

由(1)式和(2)式得

$$\frac{AC}{E'C}=\frac{AC}{EC}.$$

$$\therefore\quad E'C=EC.$$

現在綫段 EC 和 $E'C$ 有一个共同的端点 C，并且 $E'C$ 順着 EC 落下，依据相等綫段的定义，E 和 E' 一定重合. 再根据“經过两点只有一条直綫”的理由，可知 DE 和 DE' 也重合.

$$\because\quad DE' /\!/ BC,$$

$$\therefore\quad DE /\!/ BC.$$

証明这一逆定理时，我們是先作 $DE' /\!/ BC$，然后推出 DE' 和 DE 就是同一条直綫，从而断定 $DE /\!/ BC$. 这样的証題法叫**同一法**.

用同一法証題时，应当注意同一法的特点. 象在前面的証明里，$DE /\!/ BC$ 是定理的求証部分，在証明之前 DE 是否平行于 BC，还不一定，因此我們才有可能作 $DE' /\!/ BC$. 如 $DE /\!/ BC$ 则 DE' 与 DE 重合；如 DE 不平行于 BC，则 DE' 与 DE 不重合. 这在道理上也讲得通. 实际上 DE' 就是 DE. 我們把 DE' 和 DE 画成两条不同直綫，这不过是表达推証的技巧，只要把 DE' 作得和 DE 靠近一些就可以了. DE' 的位置可以在 DE 的上面，也可以在 DE 的下面，这对論証并沒有影响.

推論 如果一条直綫截三角形的两边，一边和这边上的一条綫段与另一边和另一边上的对应綫段成比例，那末这条直綫平行

于第三边.

已知 在$\triangle ABC$中,直綫DE分别截AB和AC于D和E,且$\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}$,或$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$(图1·17).

求証 $DE \parallel BC$.

【証】 $\because \quad \dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC},$

应用分比定理得

$$\frac{AB-DB}{DB}=\frac{AC-EC}{EC},$$

即
$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

依据逆定理,得$DE \parallel BC$.

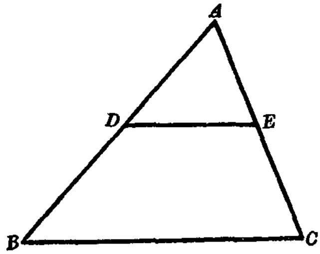


图 1·17

請讀者根据已知$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$,証明$DE \parallel BC$.

注意 这一条逆定理和它的推論对判定两直綫平行提供了新的依据.

例3. 延长$\triangle ABC$的一边AB,至B',使$AB'=3AB$,再延长AC至C',使$AC'=3AC$. 連結$B'C'$. 証明$BC \parallel B'C'$(图1·18).

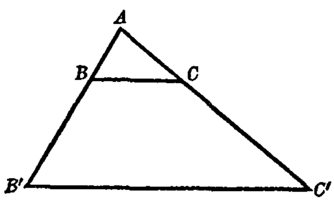


图 1·18

已知 在$\triangle AB'C'$中,

$AB'=3AB,$

$AC'=3AC.$

求証 $BC \parallel B'C'$.

【証】 $\because \quad AB'=3AB, \qquad \therefore \quad \dfrac{AB'}{AB}=3.$ (1)

$\because \quad AC'=3AC, \qquad \therefore \quad \dfrac{AC'}{AC}=3.$ (2)

由(1)式和(2)式得

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}.$$

依据上面逆定理的推論得$BC \parallel B'C'$.

例 4. A, C, E 和 B, F, D 分别是 $\angle O$ 两边上的点，并且 $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$. 証明 $AF \parallel CD$(图 1·19).

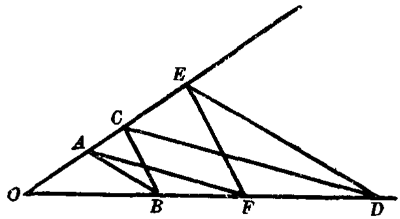


图 1·19

已知 A, C, E 和 B, F, D 分别是 $\angle O$ 两边上的点.

$AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$.

求証 $AF \parallel CD$.

分析 要証明 $AF \parallel CD$，只要証明 AF 在 $\triangle ODC$ 的两边上截得的綫段成比例，例如 $\frac{OC}{OA}=\frac{OD}{OF}$ 即可. 从已知 $AB \parallel DE$ 和 $BC \parallel EF$，我們可得 $\frac{OA}{OE}=\frac{OB}{OD}$ 和 $\frac{OC}{OE}=\frac{OB}{OF}$. 把前式除后式即可推得 $\frac{OC}{OA}=\frac{OD}{OF}$.

【証】 $\because\ AB \parallel DE$, $\therefore\ \frac{OA}{OE}=\frac{OB}{OD}$. (1)

$\because\ BC \parallel EF$, $\therefore\ \frac{OC}{OE}=\frac{OB}{OF}$. (2)

以(1)式两端分别除(2)式两端，得

$$\frac{OC}{OA}=\frac{OD}{OF}. \tag{3}$$

依据逆定理的推論，由(3)式得

$$AF \parallel CD.$$

3. 平行綫截得比例綫段定理 2 三条平行綫在两条直綫上截得的綫段对应成比例.

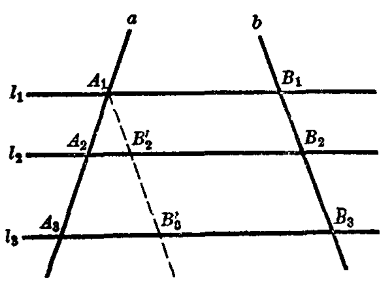


图 1·20

已知 直綫 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$; l_1, l_2, l_3 截直綫 a 于 A_1, A_2, A_3，截直綫 b 于 B_1, B_2, B_3(图 1·20).

求証 $\frac{A_1A_2}{A_2A_3}=\frac{B_1B_2}{B_2B_3}$.

分析 在平行綫截得比例綫段

定理1里,成比例的綫段出現在同一个三角形的两条边上,为了証明 $\frac{A_1A_2}{A_2A_3}=\frac{B_1B_2}{B_2B_3}$,有必要把綫段 A_1A_2, A_2A_3, B_1B_2, B_2B_3 設法集中在同一个三角形里. 現在过 A_1 引 $A_1B_3' \parallel b$, A_1B_3' 分别截 l_2 和 l_3 于 B_2' 和 B_3'. 显然 $A_1B_2'B_2B_1$ 和 $B_2'B_3'B_3B_2$ 都是平行四边形,从而 $A_1B_2'=B_1B_2$, $B_2'B_3'=B_2B_3$. 这样就把四条有关的綫段集中在 $\triangle A_1A_3B_3'$ 里了.

【証】 过 A_1 引 $A_1B_3' \parallel b$. A_1B_3' 截 l_2 于 B_2', 截 l_3 于 B_3'. 在 $\triangle A_1A_3B_3'$ 里, $\because$ $A_2B_2' \parallel A_3B_3'$, $\therefore$ $\frac{A_1A_2}{A_2A_3}=\frac{A_1B_2'}{B_2'B_3'}$.

但是四边形 $A_1B_2'B_2B_1$ 和 $B_2'B_3'B_3B_2$ 都是平行四边形, 由平行四边形对边相等的性质知 $A_1B_2'=B_1B_2$, $B_2'B_3'=B_2B_3$. 从而有

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3}=\frac{B_1B_2}{B_2B_3}.$$

习 题 1·3

1. 在 $\angle A$ 的一边上有两点 B 和 C, 另一边上有两点 D 和 E. 在下列条件下,直綫 BD 与 CE 是否平行?

(1) $AB=3\,\text{m}$, $BC=4\,\text{m}$, $AD=1.8\,\text{m}$, $DE=2.4\,\text{m}$;

(2) $AB:BC=3:4$, $AE=3.5\,\text{m}$, $AD=1.5\,\text{m}$;

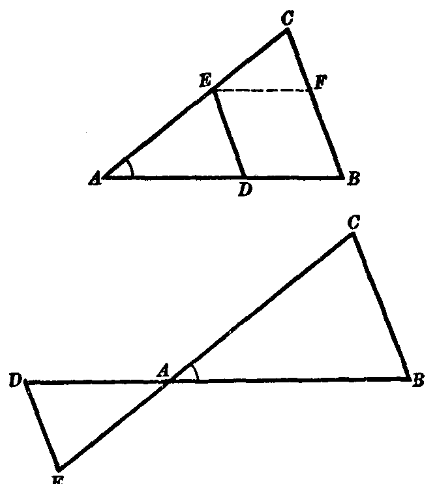
(3) $AB=\frac{7}{13}AC$,

$AD=2.8\,\text{m}$,

$DE=2\,\text{m}$.

2. 如图. $\angle A$ 的两边 AB 和 AC 被两平行綫 DE 和 BC 所截,証明 DE 和 BC, 与綫段 AE 和 AC 或 AD 和 AB 成比例.

[提示: 过点 E 作 $EF \parallel AB$, EF 交 BC 于 F (如图), 再利用平行綫截得比例綫段定理以及图中平行四边形的关系即可証明. 如果 DE 和 $\angle A$ 两边的延长綫相交, 本題的結論也是正确

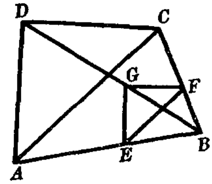


(第2題)

的.]

3. 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $DE \parallel BC$，DE 分别交 AB，AC 于点 D 和 E. 那末 DE 必被 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中綫 AF 所平分.

4. 在四边形 $ABCD$ 的对角綫 BD 上取一点 G，作 $GE \parallel DA$，GE 交 AB 于 E，作 $GF \parallel DC$，GF 交 BC 于 F，并且連接 EF. 求証 $EF \parallel AC$.



(第 4 題)

5. 判断下面的結論是否正确："已知直綫 l_1, l_2 和 l_3 分别交 $\angle O$ 的两边于 A, B, C 以及 A_1, B_1, C_1 各点，而且 $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$. 那么，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$."

*6. 已知直綫 AA', BB', CC' 和 DD' 相交于点 O，它們和两条平行直綫 MN 和 $M'N'$ 的交点分别是 A, B, C, D 和 A', B', C', D'. 証明 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$.

[提示：参考第 2 題的結果.]

7. 在 $\triangle ABC$ 中，作平行 BC 的直綫，交 AB 于 D，交 AC 于 E. 如果 BE 和 CD 相交于点 O，AO 和 DE 相交于点 F，AO 的延长綫和 BC 相交于点 G. 証明：

(1) $\frac{BG}{GC}=\frac{DF}{FE}$; (2) $\frac{BG}{GC}=\frac{EF}{FD}$; (3) $BG=GC$.

8. 証明梯形中两条对角綫被交点分成的两部分的比是相等的.

9. 在已知梯形的两腰 AD 和 BC 上各有一点 E 和 F. 如果 $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$，那么 EF 平行于梯形的两底. 假使 E 和 F 是分别在两腰的延长綫上，这时結論也成立.

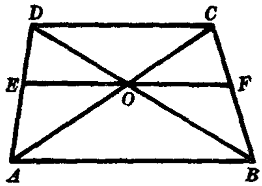
(注意：这可作为平行綫截得比例綫段定理2的逆定理；讀者不要把第 5 題这个逆命題誤作逆定理.)

10. 証明过梯形对角綫交点，且平行于底的直綫被夹在两腰間的綫段部分，必被这个交点所平分.

11. 在 $\angle A$ 的一边上順次截取 $AB=3$ cm, $BC=5$ cm, $CD=6$ cm, 并且作相互平行的直綫 BB', CC', DD'，分别交 $\angle A$ 的另一边于 B', C', D'. 如果 AC' 与 $C'D'$ 的差是 4 厘米，求 AB', $B'C'$, $C'D'$ 的长.

*12. 在梯形 $ABCD$ 中，下底 AB 长 12 丈，上底 CD 长 9 丈. 过对角綫的交点 O 作平行于底的直綫，求夹在两腰間的綫段 EF 的长(附图).

[已知：$AB=12$ 丈，$CD=9$ 丈. 直綫 EF 过对角綫的交点 O，平行于梯



(第 12 題)

形的底.

求綫段 EF 的长.

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是梯形,

$$\therefore\quad AB \parallel CD,$$

由第 2 題及已知条件可得

$$\frac{OC}{OA}=\frac{CD}{AB}=\frac{3}{4},$$

因此, $$\frac{OC}{OA+OC}=\frac{OC}{CA}=\frac{3}{7}.$$

已知 EF 过点 O 且平行于 AB, 那么, $OF \parallel AB$, 应有

$$\frac{OC}{CA}=\frac{OF}{AB}=\frac{3}{7},$$

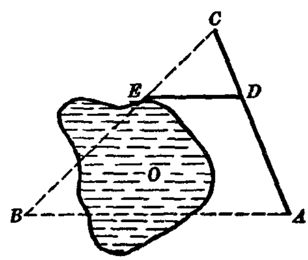
于是 $$OF=\frac{3}{7}AB=5\frac{1}{7}\ (\text{丈}),$$

同理可以求出

$$OE=5\frac{1}{7}\ (\text{丈}).\ (\text{或利用第 10 題的結果})$$

$$\therefore\quad EF=OE+OF=10\frac{2}{7}\ (\text{丈}).]$$

13. A, B 两点間隔有湖泊 O. 为了求点 A 到点 B 的距离, 我們先找一点 C, 量得 $CA=60\,\text{m}$. 在 CA 上取 $CD=24\,\text{m}$, 再作 $DE \parallel AB$, 并使 C, E 和 B 三点在一直綫上. 量得 $DE=32\,\text{m}$. 求 AB 两点的距离.



(第 13 題)

14. 已知梯形的两底分别等于 12 厘米和 18 厘米, 而它的两腰分别等于 7 厘米和 9 厘米. 延长两腰使相交, 求交点和梯形的上底所組成的三角形的周长.

15. 在 14 題中, 計算:

(1) 經过梯形对角綫的交点, 平行于底的直綫夹在两腰間綫段的长;

(2) 两腰被此綫段所分成的綫段的长.

16. 已知 P 是一个定角 ABC 所在平面上的一点, 过点 P 作直綫使它在角的两条边上所截到的綫段成定比 $m:n$.

[提示: 如果点 P 在已知角的边上, 容易作出这一直綫, 我們还要考虑点 P 在角的内部或外部的情形.]

§1·4 应用平行綫截得比例綫段定理的作图題

作图題 1 求作綫段 a, b, c 的第四比例項.

已知 綫段 a, b, c (图 1·21).

求作 綫段 x, 使 $a:b=c:x$.

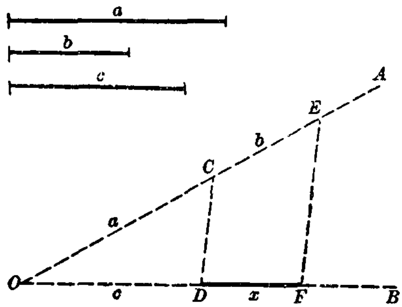


图 1·21

【作法】 从任意点 O, 引射綫 OA 和 OB. 在 OA 上截取綫段 $OC=a$, $CE=b$. 在 OB 上截取綫段 $OD=c$. 連結 CD. 过 E 引 $EF \parallel CD$, EF 截 OB 于 F. 綫段 DF 就是求作的綫段 x.

【証】 $\because$ $CD \parallel EF$, $\therefore$ $OC:CE=OD:DF$.

这就是 $a:b=c:x$. 所以綫段 DF 为求作的綫段.

注意 在这个作图里, 綫段 DF 也是綫段 a, c, b 的第四比例項.

例 1. 已知綫段 a, b, c, 求作綫段 x, 使 $x=\dfrac{3ab}{2c}$.

已知 綫段 a, b, c (图 1·22).

求作 綫段 x, 使 $x=\dfrac{3ab}{2c}$.

分析 等式 $x=\dfrac{3ab}{2c}$ 可以改写为 $2c:3a=b:x$, 因此求作的綫段 x 为綫段 $2c$, $3a$, b 的第四比例項.

【作法】 按照作图題 1, 作綫段 $2c$, $3a$, b 的第四比例項.

証明由讀者自己来完成.

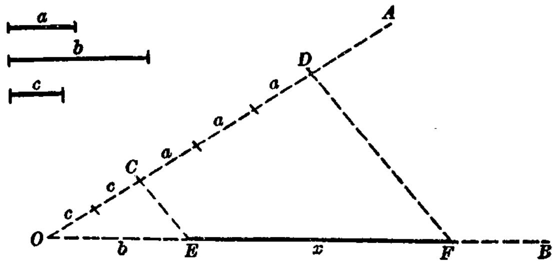


图 1·22

注意 等式 $x=\frac{3ab}{2c}$ 也可改写为 $2c:b=3a:x$, 或 $2c:a=3b:x$, 或 $2c:3b=a:x$. 对应每一个比例,就有一个作綫段 x 的方法.

作图题 2 在已知綫段 AB 上求作一点 P, 使綫段 AP 和 PB 的比等于已知綫段的比 $m:n$。

已知 綫段 AB, m, n(图 1·23)。

求作 綫段 AB 上的点 P, 使 $\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$.

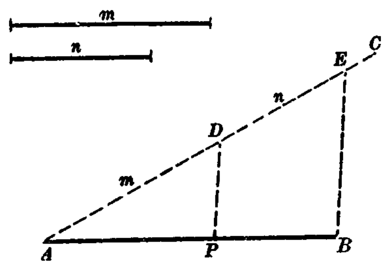


图 1·23

【作法】 过 A 引任意射綫 AC. 在 AC 上截取綫段 $AD=m$, 綫段 $DE=n$. 連結 EB. 过 D 引 $DP /\!/ EB$, DP 截 AB 于 P. 則 P 就是求作的点.

証明由讀者自己来完成.

注意 在这个作图题里,如果已知的比不是已知綫段 m, n 的比,而是两个数的比,譬如 $3:2$, 那末可以选取任意綫段 l 作长度单位,用綫段 $3l$, $2l$ 作为綫段 m, n, 再按上面的方法作图.

作图题 3 在已知綫段 AB 的延长綫上求作一点 P, 使綫段 AP 和 BP 的比等于已知綫段的比 $m:n$.

已知 綫段 AB, m, n (图 1·24).

求作 綫段 AB 延长綫上的点 P, 使 $\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$.

【作法】 过 A 引任意射綫 AC. 在 AC 上截取綫段 $AD=m$, 再在 DA 上截取綫段 $DE=n$. 連結 EB. 过 D 引 $DP \parallel EB$, DP 截 AB 的延长綫于 P. 則 P 就是求作的点.

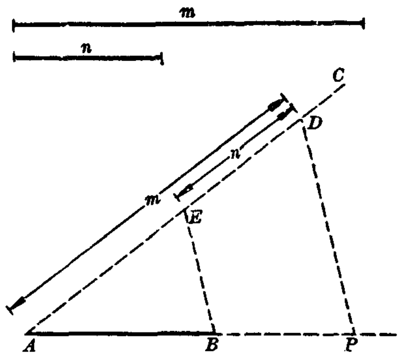


图 1·24

【証】 $\because \quad EB \parallel DP$,

$\therefore \quad AD:DE=AP:PB$,

即 $\quad AP:PB=m:n$.

如果 P 是綫段 AB 的点, 并且它使綫段 AP 和 PB 的比等于已知比 $m:n$, 那末点 P 叫做綫段 AB 的**內分点**, 或者說点 P 按照定比 $m:n$ 內分綫段 AB. 作图题 2 指出了按定比內分一条已知綫段的方法.

如果 P 是綫段 AB (或 BA)的延长綫的点, 并且它使綫段 AP 和 PB 的比等于已知比 $m:n$, 那末点 P 叫做綫段 AB 的**外分点**, 或者說点 P 按照定比 $m:n$ 外分綫段 AB. 作图题 3 指出了按定比外分一条已知綫段的方法.

注意 当 $m=n$ 时, 綫段 AB 的內分点就是它的中点; 但是它沒有外分点.

例 2. 求作一个三角形, 使它的周长等于 l, 三边的比是 3:5:7.

已知 綫段 l (图 1·25).

求作 $\triangle ABC$, 使 $AB:BC:CA=3:5:7$, 并且 $AB+BC+CA=l$.

【作法】 作 $LM=l$, 过 L 引任意射綫 LN. 取适当綫段 a 为长度单位, 在 LN 上截 $LP=3a$, $PQ=5a$, $QR=7a$. 連結 RM. 过 P 和 Q 各引 RM 的平行綫 PP' 和 QQ', PP' 和 QQ' 分別截 LM 于 P' 和 Q'. 取 LP', $P'Q'$, $Q'M$ 为三边, 作三角形 ABC, 这就是求作的三角形.

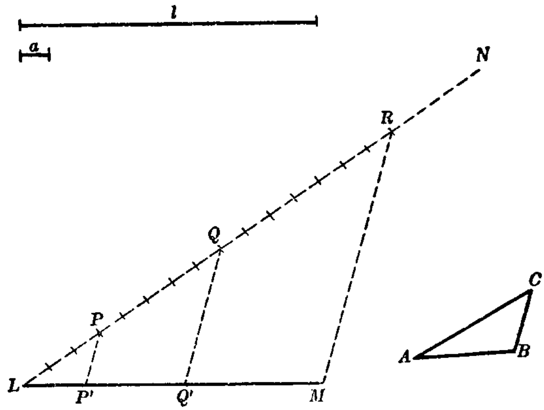


图 1·25

証明由讀者自己来完成。

习 題 1·4

1. 已知綫段 $a=25\,\text{mm}$, $b=c=18\,\text{mm}$. 求作綫段 a, b, c 的第四比例項 d.

2. 已知两綫段 a 与 b, 求作綫段 x, 使 $a:b=b:x$.

3. 已知三綫段 a, b, c, 求作綫段 x, 使:

(1) $x=\dfrac{a^2}{b}$;　(2) $x=\dfrac{ab}{c}$;　(3) $x=\dfrac{2a^2}{c}$;

(4) $ax=bc$;　(5) $\dfrac{\frac{1}{2}a}{b}=\dfrac{c}{x}$;　(6) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3x}{c}$;

(7) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{bc}{a}$;　(8) $x=\dfrac{2ab}{3c}$.

4. 分已知綫段为两部分, 使这两部分的比为 $3:5$.

5. 在已知綫段的延长綫上求一点, 使这点到两端点所成的两綫段之比为 $7:4$.

6. 把已知綫段分为三部分, 使与三已知綫段 a, b, c 成比例.

7. 已知两綫段 a 与 b 的和为 s, 比为 $m:n$. 求作这两綫段.

8. 已知两綫段 a 与 b 的差为 d, 比为 $m:n$. 求作这两綫段.

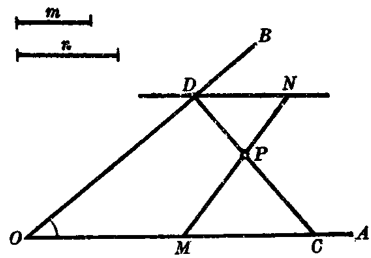
9. 过角內的一个已知点作一直綫, 使它夹在定角两边間的綫段被已知点分成 $m:n$.

［已知：P 是 $\angle AOB$ 內的一个定点，$m:n$ 是定比．

求作：过点 P 的直綫与 $\angle AOB$ 的两边分别交于点 C 和 D，使

$$CP:PD=m:n.$$

作法：在 OA 上任意取一点 M，連結 MP 并且延长到 N，使 $MP:PN=m:n$．过 N 作直綫 $ND \parallel OA$ 交 OB 于 D，連結 DP 交 OA 于 C，CD 就是所求的直綫．



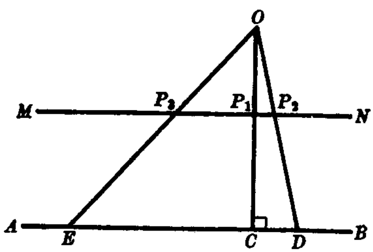
（第 9 題）

証：由作图，$DN \parallel CM$，$\therefore CP:PD=MP:PN$．$\because MP:PN=m:n$，$\therefore CP:PD=m:n$.］

10．过已知角外的一个已知点作一直綫，使已知点到直綫和角的两边的交点所成的两綫段之比为 $m:n$．

*11．已知三角形的一个角和这角对边上的高，以及对边被高分成的两綫段之比，求作这个三角形．

12．O 为定直綫 AB 外一点，点 P 分 O 到 AB 所作綫段成定比 $m:n$．求点 P 的軌迹．



（第 12 題）

［已知：O 为定直綫 AB 外一点，連結 O 与 AB 上任意一点的綫段被点 P 分成 $m:n$．

求点 P 的軌迹．

解：从 O 作 $OC \perp AB$，垂足是 C，并作点 P_1，使 $OP_1:P_1C=m:n$．过 P_1 作直綫 MN 平行于 AB，那么 MN 就是所求的軌迹．証明如下：

(1) 設 P_2 为 MN 上的任意一点，連接 OP_2 并延长交 AB 于 D．由于 $P_1P_2 \parallel CD$，可知 $\dfrac{OP_2}{P_2D}=\dfrac{OP_1}{P_1C}=\dfrac{m}{n}$．这就是說，$MN$ 上的点都符合題目所給的条件．

(2) 从 O 到 AB 任作一綫段 OE，假定 OE 上的点 P_3 使 $\dfrac{OP_3}{P_3E}=\dfrac{m}{n}$．連結 P_1P_3，那么 $\dfrac{OP_1}{P_1C}=\dfrac{m}{n}=\dfrac{OP_3}{P_3E}$．$\therefore P_1P_3 \parallel CE$．这就是說，$P_3$ 必定在直綫 MN 上，这是因为过直綫 AB 外的一点 P_1 只能作一条直綫和它平行．于是証得了符合已知条件的点，都在 MN 上.］

13．証明在三角形內，夹在两边之間且平行于底边的綫段的中点的軌迹，是底边上的中綫．

14．与两条平行綫距离之比是 $m:n$ 的点的軌迹是直綫．

［提示：本題应先确定軌迹直綫的位置，然后証明．］

*15．分夹在一已知角的两边的平行綫段成定比 $m:n$ 的点的軌迹是什么？并加以証明．

§1·5 三角形內角、外角平分綫性质

1．三角形內角平分綫定理 三角形內角的平分綫按照夹这个角的两边的比內分对边．

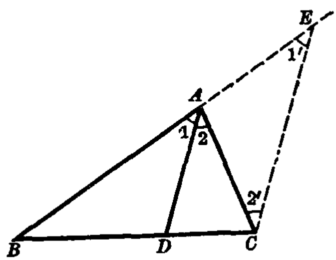


图 1·26

已知 在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分綫(图 1·26)．

求証 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$．

分析 要判定綫段 BD, DC, AB, AC 成比例，我們可以应用平行綫截得比例綫段定理 1．但是这四条綫段必須对应地分布在同一个三角形的两边上．为此，过 C 引 DA 的平行綫 CE，交 BA 的延长綫于 E．在 $\triangle BCE$ 中，显然有 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BA}{AE}$，只要能够証得 $AE=AC$ 即可．

【証】 过 C 引 $CE\parallel DA$, CE 交 BA 的延长綫于 E．

$\because CE\parallel DA,\quad \therefore \angle 1=\angle 1',\ \angle 2=\angle 2'.$

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分綫，$\therefore \angle 1=\angle 2$．从而 $\angle 1'=\angle 2'$，由此得 $AE=AC$．

$\because CE\parallel DA$, $\therefore \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BA}{AE}$．也就是 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$．

2．三角形外角平分綫定理 三角形外角的平分綫如果和对边的延长綫相交，它按照夹相应內角的两边的比外分对边．

已知 在 $\triangle ABC$ 中，外角 CAE 的平分綫 AD 交 BC 的延长綫于 D (图 1·27)．

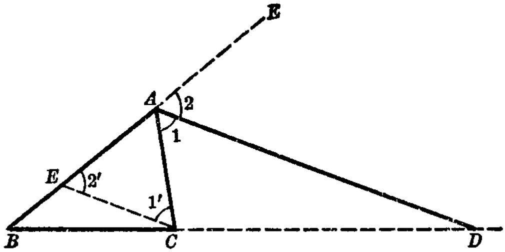


图 1 27

求証 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.

分析 要判定綫段 BD, DC, AB, AC 成比例，我們可以应用平行綫截得比例綫段定理 1 或它的推論. 但是这四条綫段必須对应地分布在同一个三角形的两边上，为此，过 C 引 $CE \parallel DA$，交 AB 于 E. 在 $\triangle ABD$ 中，显然有 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BA}{AE}$. 只要能証得 $AE=AC$ 即可.

【証】 过 C 引 $CE \parallel DA$, CE 交 AB 于 E. $\because CE \parallel DA$, $\therefore \angle 1=\angle 1'$, $\angle 2=\angle 2'$. $\because AD$ 是 $\angle CAE$ 的平分綫, $\therefore \angle 1=\angle 2$. 从而 $\angle 1'=\angle 2'$. 由此得 $AE=AC$.

$\because CE \parallel DA$, $\therefore \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BA}{AE}$. 也就是 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BA}{AC}$.

注意 在这一条定理里，当 $AB>AC$ 时，AD 交 BC 的延长綫于 D；当 $AB=AC$ 时，$AD \parallel BC$，AD 和 BC 不相交；当 $AB<AC$ 时，AD 交 CB 的延长綫于 D.

例 1. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 按照 AB 和 AC 的比内分 BC. 試証綫段 AD 是 $\angle BAC$ 的平分綫.

已知 在 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$ (图 1·28).

求証 AD 是 $\angle BAC$ 的平分綫.

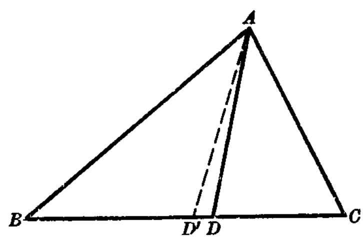


图 1·28

【証】 作 $\angle BAC$ 的平分綫 AD'. 依据三角形內角平分綫定理得

$$\frac{BD'}{D'C}=\frac{AB}{AC}. \tag{1}$$

把(1)式和已知比例 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ 作比較，得

$$\frac{BD'}{D'C}=\frac{BD}{DC}. \tag{2}$$

对(2)式应用合比定理，得

$$\frac{BD'+D'C}{D'C}=\frac{BD+DC}{DC},$$

即

$$\frac{BC}{D'C}=\frac{BC}{DC}.$$

从而 $D'C=DC$, D 和 D' 重合，AD 和 AD' 重合. 因此 AD 是 $\angle BAC$ 的平分綫.

注意 这个例題是三角形內角平分綫定理的逆定理，証明这条逆定理的方法是同一法. 利用图 1·26 也可以証明这条逆定理，請讀者自己考慮証明方法.

例 2. 已知 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 的长分别为 a, b, c. 求它的內心 I 分三条角平分綫 AD, BE, CF 所成之比(图 1·29).

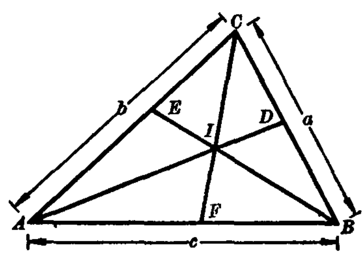


图 1·29

【解】 三角形的內心是三条角平分綫的交点.

$\because$ CF 平分角 ACB,

$\therefore$ $AC:CB=AF:FB$.

也就是 $$b:a=AF:(c-AF),$$

从而有 $$AF=\frac{bc}{a+b}.$$

$\because$ AI 平分角 CAF,

$$\therefore\ CI:IF=AC:AF.$$

也就是

$$CI:IF=b:\frac{bc}{a+b}=(a+b):c.$$

同法可得

$$AI:ID=(b+c):a,$$

$$BI:IE=(c+a):b.$$

答：内心 I 分三条角平分綫所成之比分别为 $AI:ID=(b+c):a$; $BI:IE=(c+a):b$; $CI:IF=(a+b):c$.

例3. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 按照 AB 和 AC 的比外分 BC. 証明綫段 AD 是 $\triangle ABC$ 的外角 CAE 的平分綫(图1·30).

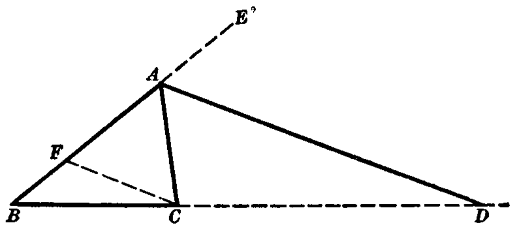


图 1·30

已知 在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

求証 AD 是 $\triangle ABC$ 外角 CAE 的平分綫.

【証】 过 $\triangle ABC$ 的頂点 C 作綫段 $CF \parallel DA$，交 AB 于 F. 依据平行綫的性质定理得

$$\angle AFC=\angle EAD, \tag{1}$$

$$\angle ACF=\angle CAD. \tag{2}$$

根据平行綫截得比例綫段定理1的推論，得 $\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AF}$. 但是 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$，所以 $\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{AF}$. 就是 $AF=AC$. 于是 $\triangle ACF$ 是等腰三角形，$\angle ACF=\angle AFC$. 再結合(1)与(2)式，得

$$\angle EAD=\angle AFC=\angle ACF=\angle CAD,$$

所以 AD 是 $\triangle ABC$ 的外角 CAE 的平分綫.

注意 这个例題就是三角形外角平分綫定理的逆定理，它的証明也可以采用与例1类似的方法，讀者可以把它們互相对比。

例4. 已知 $\triangle ABC$ 的三边 AB, BC, CA 的长各为 5cm, 3cm, 4cm. 在底边 AB 和它的延长綫上分别取点 D 和 D'，使 $AD=2\frac{6}{7}$ cm, $BD'=15$ cm (图 1·31).

求証 $CD\perp CD'$.

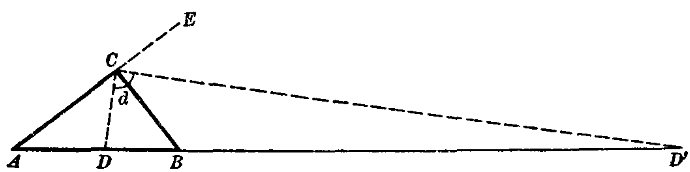


图 1·31

【証】 連結 CD 和 CD'.

$\because$ $AD:DB=2\frac{6}{7}:\left(5-2\frac{6}{7}\right)=4:3=CA:BC$,

$\therefore$ CD 平分 $\angle ACB$.

$\because$ $AD':D'B=(5+15):15=4:3=CA:BC$,

$\therefore$ CD' 平分 $\triangle ABC$ 的外角 BCE.

$\because$ $\angle ACB+\angle BCE=2d$,

$\therefore$ $\angle DCD'=\angle DCB+\angle BCD'$

$$=\frac{1}{2}\angle ACB+\frac{1}{2}\angle BCE$$

$$=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle BCE)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2d$$

$$=d.$$

$\therefore$ $CD\perp CD'$.

习 题 1·5

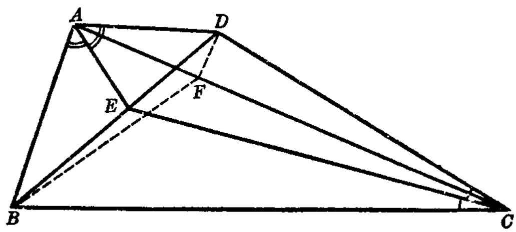
1. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 和 AD' 分别为 $\angle A$ 和它的外角的平分綫, 它們和对边 BC 的交点分别是 D, D'. 求証 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BD'}{D'C}$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB\neq AC$. $\angle A$ 的平分綫交对边 BC 于 D. D' 是 BC 延长綫上的点, 如果以 DD' 为直徑的圓通过頂点 A, 那末 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BD'}{D'C}$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B$ 与 $\angle C$ 的平分綫各交 AC, AB 于 D 和 E, 如果 $AB=AC$, 那末 $DE\parallel BC$.

4. 在四边形 $ABCD$ 中, 如果一双对角 A 和 C 的平分綫的交点 E 在对角綫 BD 上, 那末, 另一双对角 B 和 D 的平分綫的交点 F 在对角綫 AC 上.

[已知: 四边形 $ABCD$ 的对角 A 和 C 的平分綫的交点 E 在对角綫 BD 上(如图).



(第 4 題)

求証: $\angle B$ 和 $\angle D$ 的平分綫的交点 F 必在另一对角綫 AC 上.

証: 已知 $\angle A$ 和 $\angle C$ 的平分綫的交点 E 在 BD 上, 由角平分綫定理得 $AB:AD=BE:ED$, 以及 $CB:CD=BE:ED$. 从这两个等式就有 $AB:AD=CB:CD$, 又可以把它改写为

$$AB:CB=AD:CD. \tag{1}$$

假定 $\angle B$ 和 $\angle D$ 的平分綫分别交对角綫 AC 于 F 和 F'. 那末根据与前面同样的理由, 应有 $AB:CB=AF:FC$, 以及 $AD:CD=AF':F'C$. 这时由 (1) 式可以知道 $AF:FC=AF':F'C$, 从合比定理得 $(AF+FC):FC=(AF'+F'C):F'C$, 也就是 $AC:FC=AC:F'C$. 于是 $FC=F'C$, 从而可知 F 与 F' 重合. 这就是説 $\angle B$ 与 $\angle D$ 的平分綫的交点 F 在对角綫 AC 上.]

5. AC 和 BD 是四边形 $ABCD$ 的对角綫, 如果 $\angle BAC$ 和 $\angle BDC$ 的平分綫的交点在 BC 边上, 那末 $\angle ABD$ 和 $\angle ACD$ 的平分綫的交点在 AD

边上.

6. 已知 BD 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle B$ 的平分綫:

(1) $AB=10\,\mathrm{cm}$, $BC=15\,\mathrm{cm}$, $AC=20\,\mathrm{cm}$. 求 AD 和 DC;

(2) $AD:DC=8:5$, $AB=16\,\mathrm{cm}$. 求 BC;

(3) $AB:BC=2:7$, $DC-AD=1\,\mathrm{cm}$. 求 AC.

7. 三角形的两边各为 $9\,\mathrm{cm}$ 和 $6\,\mathrm{cm}$, 它們夹角的平分綫分第三边成两段,其中的一段等于两边中的一边,求这三角形的第三边.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. $\angle B$ 和 $\angle C$ 的平分綫相交于 O, AO 的延长綫交 BC 于 D. 求 $AO:OD$.

[提示: 可設 $BD=a-CD$; 或 $CD=a-BD$.]

9. D 为 $\triangle ABC$ 中 BC 上的一点, 由下面的条件分别判定 AD 是否是 $\angle A$ 的平分綫:

(1) $AB=12\,\mathrm{cm}$, $AC=15\,\mathrm{cm}$, $BD=8\,\mathrm{cm}$, $DC=10\,\mathrm{cm}$;

(2) $AB=12\,\mathrm{m}$, $AC=56\,\mathrm{cm}$, $BD:DC=14:3$;

(3) $AB=\dfrac{5}{11}AC$, $BD=2\,\mathrm{m}$, $DC=4.5\,\mathrm{m}$;

(4) $AB=6\,\mathrm{m}$, $AC=28\,\mathrm{m}$, $BD=\dfrac{3}{17}BC$.

10. $AMNP$ 为 $\triangle ABC$ 的內接菱形, 点 M, N 和 P 分别在 AB, BC 和 CA 上. 如果 $AB=21\,\mathrm{cm}$, $BC=18\,\mathrm{cm}$, $CA=15\,\mathrm{cm}$; 求 BN 和 NC 的长.

[提示: 菱形的对角綫平分菱形的角.]

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=15\,\mathrm{cm}$, $AC=10\,\mathrm{cm}$. AD 为 $\angle A$ 的平分綫, 由点 D 引直綫平行于 AB, 并和 AC 相交于 E. 求 AE, EC 和 DE.

12. 在等腰三角形 ABC 中, $AC=b$, $AB=BC=a$. AN 和 CM 为 $\angle A$ 与 $\angle C$ 的平分綫. 求 MN 的长.

*13. 自已知 $\triangle ABC$ 的頂点 A, 引动直綫 AK, 交 BC 于 K. 求証 $\triangle AKC$ 的內心的軌迹是一条綫段.

相似三角形

§1·6 相似多边形

图 1·32 和图 1·33 是同一地段的平面图, 在繪图时由于应用了不同的比例尺,因此它們的大小不同,但形状是一样的. 如果用

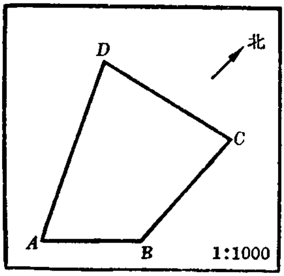


图 1·32

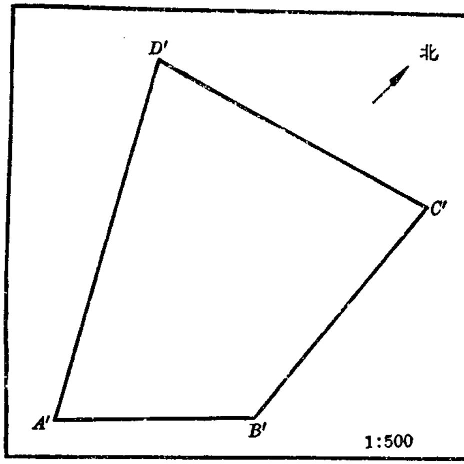


图 1·33

量角器和直尺分别度量它們的每一个角和每一条边，我們得到下面的关系：(1) 它們的对应角相等，即 $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$\angle D=\angle D'$；(2) 它們的对应边都成比例，即 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$.

我們把对应角相等、对应边都成比例的两个多边形叫做**相似多边形**.

表示两个图形相似，我們用符号“$\backsim$”，讀做“相似于”. 在图 1·32 和 1·33 里，显然有四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$.

两个相似多边形的任一組对应边的比叫做**相似比**(也叫做**相似系数**). 在图 1·32 和图 1·33 里，我們分别量得 $AB=1.3\,\mathrm{cm}$，$A'B'=2.6\,\mathrm{cm}$. 相似四边形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 的相似比为 $1/2$. 在这里我們規定：如果多边形 I 和多边形 II 的相似比等于 K，那末多边形 I 的一条边是多边形 II 的一条对应边的 K 倍. 当 $K=1$，即多边形 I 和多边形 II 的每一組对应边相等时，則它們不仅相似，而且全等. 因此全等多边形是相似多边形当相似比等于 1 时的特例.

判定两个多边形相似，必須指出它們同时符合两个条件：(1)对应角相等，(2)对应边都成比例．正方形和矩形的对应角相等，但是对应边不都成比例，因此它們不是相似形．正方形和菱形的对应边都成比例，但是对应角不等，因此它們也不是相似形(图1·34)．

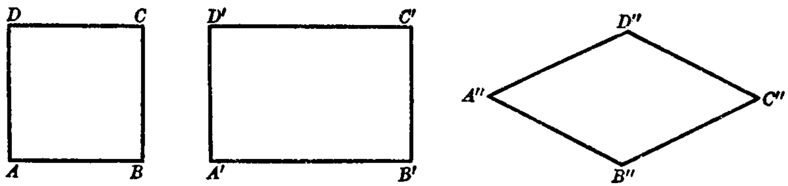


图 1·34

在日常生活里，我們經常遇到形状相同的图形，例如原来照片和放大后的照片，用不同比例尺繪制的同一机械零件的图样等等．

例 1. 銳角等于 $60°$ 的两个菱形是相似的．

已知 菱形 $ABCD$ 的 $\angle A=60°$，菱形 $A'B'C'D'$ 的 $\angle A'=60°$ (图1·35)．

求証 菱形 $ABCD \backsim$ 菱形 $A'B'C'D'$．

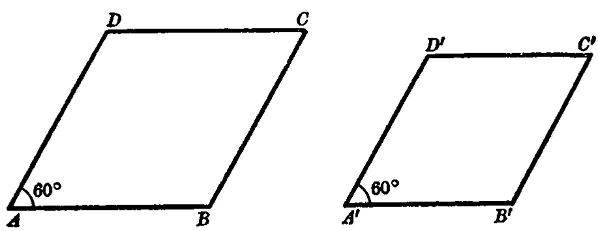


图 1·35

【証】 $\because$ 菱形 $ABCD$ 的 $\angle A=60°$，$\therefore$ 其他的三个角为：$\angle B=120°$，$\angle C=60°$，$\angle D=120°$．同样菱形 $A'B'C'D'$ 的 $\angle A'=60°$，其他三角各为：$\angle B'=120°$，$\angle C'=60°$，$\angle D'=120°$．从而有

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',\ \angle D=\angle D'. \quad (1)$$

$\because$ 菱形是等边的，$\therefore$ $AB=BC=CD=DA$； $A'B'=B'C'=C'D'=D'A'$. 从而有

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}. \quad (2)$$

由(1)，(2)两式可知，菱形 $ABCD\backsim$菱形 $A'B'C'D'$.

例 2. 工厂鋪地用矩形水泥磚，半磚 $EFDA$ 和整磚 $ABCD$ 相似. 求水泥磚的两条邻边的比(图 1·36).

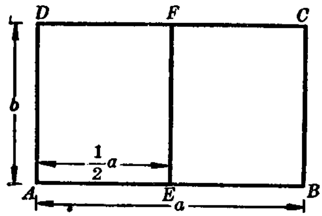


图 1·36

已知 矩形 $EFDA\backsim$矩形 $ABCD$，并且 $AE=\frac{1}{2}AB$.

求 $\frac{AB}{DA}$.

【解】 設 $AB=a$，$DA=b$，则 $AE=\frac{1}{2}a$. 这里 DA 是矩形 $EFDA$ 的长边，同时它又是矩形 $ABCD$ 的短边. $\because$ 矩形 $EFDA\backsim$矩形 $ABCD$，

$$\therefore \quad \frac{AB}{DA}=\frac{DA}{AE}. \quad 即 \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{\frac{a}{2}}.$$

从上式得 $\quad a^2=2b^2,\ \frac{a^2}{b^2}=2,\ \frac{a}{b}=\sqrt{2}.$

答：$\frac{AB}{DA}=\sqrt{2}$.

例 3. 两个相似梯形的中位綫分原梯形为两組对应相似梯形.

已知 梯形 $ABCD \backsim$ 梯形 $A'B'C'D'$. 中位綫 EF 分梯形 $ABCD$ 为四边形 $ABFE$ 和 $EFCD$; 中位綫 $E'F'$ 分梯形 $A'B'C'D'$ 为四边形 $A'B'F'E'$ 和 $E'F'C'D'$ (图 1·37).

求証 四边形 $ABFE$, $EFCD$, $A'B'F'E'$, $E'F'C'D'$ 都是梯形; 并且梯形 $ABFE \backsim$ 梯形 $A'B'F'E'$, 梯形 $EFCD \backsim$ 梯形 $E'F'C'D'$.

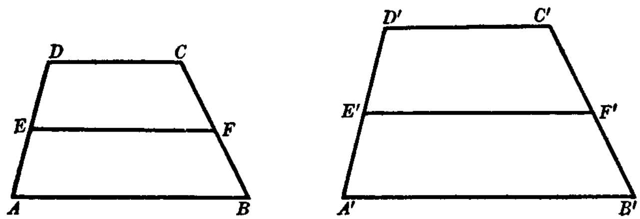


图 1·37

【証】 $\because$ $EF \parallel AB$, $\therefore$ $ABFE$ 是梯形. 同理可証 $EFCD$, $A'B'F'E'$, $E'F'C'D'$ 都是梯形.

$\because$ 梯形 $ABCD \backsim$ 梯形 $A'B'C'D'$, 依据相似多边形的定义, 有

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',\ \angle D=\angle D', \tag{1}$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}. \tag{2}$$

$\because$ $EF \parallel CD$, $E'F' \parallel C'D'$, $\therefore$ (1) 的四个等式可以写为

$$\left.\begin{aligned}&\angle A=\angle A',\quad \angle B=\angle B',\\&\angle BFE=\angle C=\angle C'=\angle B'F'E',\\&\angle FEA=\angle D=\angle D'=\angle F'E'A'.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

这表示梯形 $ABFE$ 和 $A'B'F'E'$ 的对应角相等.

等式 (2) 的部分可以写为 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}B'C'}=\dfrac{\frac{1}{2}DA}{\frac{1}{2}D'A'}$,

即
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BF}{B'F'}=\frac{EA}{E'A'}. \tag{4}$$

从等式 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{CD}{C'D'}$ 应用等比定理，得

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AB+CD}{A'B'+C'D'}=\frac{\frac{1}{2}(AB+CD)}{\frac{1}{2}(A'B'+C'D')}. \tag{5}$$

$\because\quad EF=\dfrac{1}{2}(AB+CD),\quad E'F'=\dfrac{1}{2}(A'B'+C'D'),$

$\therefore$ (5)式成为

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{EF}{E'F'}. \tag{6}$$

从(4)，(6)两式得

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BF}{B'F'}=\frac{EF}{E'F'}=\frac{EA}{E'A'}. \tag{7}$$

这表示梯形 $ABFE$ 和 $A'B'F'E'$ 的对应边都成比例. 由(3)和(7)，依据相似多边形的定义，梯形 $ABFE\backsim$ 梯形 $A'B'F'E'$. 用同法可証梯形 $EFCD\backsim$梯形 $E'F'C'D'$.

习 题 1·6

1．所有的矩形都相似嗎？所有的菱形呢？为什么？

2．举出一个日常生活中經常遇到的相似形的例子。

3．两个四边形中，如果它們的对应边成比例，并且有三个角对应相等，这两个四边形是否相似？

4．証明所有的正方形都相似.

5．証明有一个銳角对应相等的两个菱形相似.

6．窗玻璃的內外框都是矩形，而且內外框間的寬度都是一样的. 这两个矩形是否相似？

7．已知梯形的两底分别为 a 厘米与 b 厘米. 如果一直綫平行于底，并且把梯形分成两个小的相似梯形。求这直綫夹在两腰間的綫段之长.

8．在 §1·6 的例 2 (图 1·36) 中，如果已知磚长 $AB=160$ cm，求磚的寬 AD.

9．在 ▱$ABCD$ 中，已知 $AB=a$ dm，$BC=b$ dm. 直綫 EF 截平行四边形

成两个小的平行四边形，其中 $EFDA$ 和 $ABCD$ 相似. 求 AE 的长.

10. 求作一个四边形，使它和一个已知四边形相似，并且对应边的比等于2.

§1·7 相似三角形的判定

判定两个多边形相似，必須証明它們对应角相等和对应边都成比例. 三角形是多边形的特殊情况，两三角形相似，自然也要满足这些条件，即三个角分别对应相等，三条边对应成比例. 但是在判定两个三角形相似时，只要两个三角形的对应角和对应边符合上面条件的一部分，我們就能判定这两个三角形相似了. 在提出三角形相似判定定理之前，我們先証明下面的一条預备定理.

預备定理 和三角形两边相交并且平行于第三边的直綫，截三角形两边所得的三角形和原三角形相似.

已知 在 $\triangle ABC$ 中，$B'C'$ 分别交 AB 和 AC 于 B' 和 C'，并且 $B'C' \parallel BC$ (图 1·38).

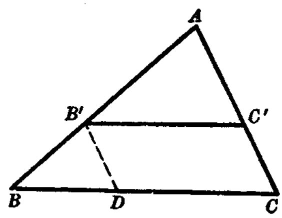


图 1·38

求証 $\triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$.

【証】 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AB'C'$ 中，

$\angle BAC = \angle B'AC'$.

$\because$ $B'C' \parallel BC$,

$\therefore$ $\angle B = \angle AB'C'$,

$\angle C = \angle AC'B'$.

即 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AB'C'$ 的对应角相等.

由 $B'C' \parallel BC$，依据平行綫截得比例綫段定理1的推論，得

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{CA}{C'A}. \tag{1}$$

过 B' 引 $B'D \parallel AC$，交 BC 于 D. 依据平行綫截得比例綫段定理1的推論，得

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{DC}. \tag{2}$$

但是四边形 $DCC'B'$ 是平行四边形，从而有 $DC=B'C'$，(2)式成为

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{BC}{B'C'}. \tag{3}$$

由(1)和(3)式得

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A}. \tag{4}$$

(4)式断定了 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AB'C'$ 的对应边都成比例.

所以 $\triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$.

現在我們就来研究怎样判定两个三角形相似的問題. 下面是三条三角形相似的判定定理. 在这三条判定定理的証明过程里，前面的預备定理将起重要的作用.

三角形相似判定定理1 如果一个三角形的两个角和另一个三角形的两个角对应相等，那末这两个三角形相似.

已知 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$ (图1·39).

求証 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

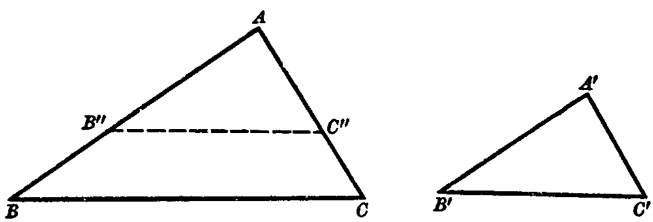


图 1·39

【証】 在 AB 上取 B''，使 $AB''=A'B'$(如果 $AB<A'B'$，那末在 $A'B'$ 上取 B''，使 $A'B''=AB$). 过 B'' 引 $B''C''\parallel BC$，$B''C''$ 交 AC 于 C''. 依据預备定理，得 $\triangle ABC \backsim \triangle AB''C''$.

在 $\triangle AB''C''$ 和 $\triangle A'B'C'$ 里，有 $AB''=A'B'$，$\angle A=\angle A'$.

$\because$ $B''C''\parallel BC$， $\therefore$ $\angle AB''C''=\angle B=\angle B'$.

依据三角形全等判定定理 3 知 $\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$.

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'.$$

例 1. 两个等腰三角形的頂角相等，那末它們相似.

已知 在等腰三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 中，頂角 A=頂角 A' (图 1·40).

求証 等腰三角形 $ABC \backsim$ 等腰三角形 $A'B'C'$.

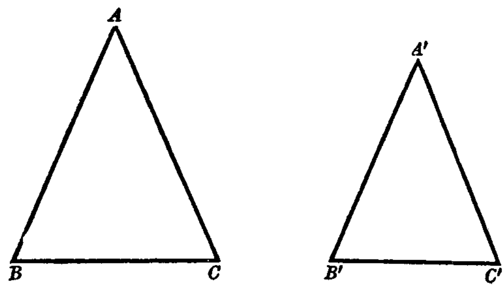


图 1·40

【証】 依据等腰三角形两底角相等的性质和三角形的內角和定理知

$$\angle B = \frac{180° - \angle A}{2},$$

$$\angle B' = \frac{180° - \angle A'}{2}.$$

$$\because \quad \angle A = \angle A', \qquad \therefore \quad \angle B = \angle B'.$$

再依据三角形相似的判定定理 1 得

$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

例 2. 从圓外一点 A 所引的两割綫分别交圓于 B, C 和 D, E. 連結 B, D 和 E, C. 那末 $\triangle ABD \backsim \triangle AEC$ (图 1·41).

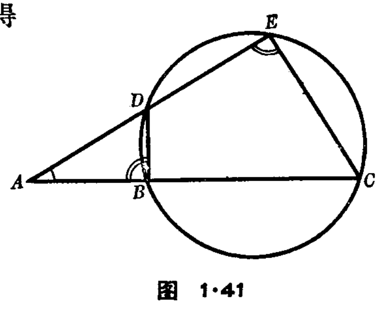


图 1·41

已知 A 是圓外的一点.

ABC 和 ADE 是圓的割綫. 連結 BD 和 EC.

求証 $\triangle ABD \backsim \triangle AEC$.

分析 要証明 $\triangle ABD \backsim \triangle AEC$，必須指出它們有两組对应角相等. 現在已經有 $\angle BAD = \angle EAC$，还須找出一組角对应相等.

四边形 $BCED$ 是圓内接四边形. 我們已經学过：圓内接四边形的任何一个外角等于它的內对角，据此即有 $\angle ABD = \angle AEC$. 再依据三角形相似判定定理 1 就可以断定 $\triangle ABD \backsim \triangle AEC$ 了.

証明請讀者自己来完成.

例 3. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$. 以 B 为圓心，BC 为半徑作圓弧，交 AC 于 D. 試証 BC 是 AC 和 CD 的比例中項（图 1·42）.

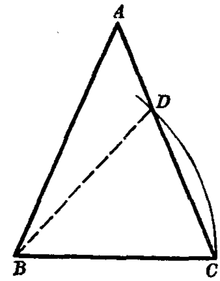


图 1·42

已知 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$. 以 B 为圓心，BC 为半徑作圓弧，交 AC 于 D.

求証 $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{BC}{CD}$.

分析 要証 $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{BC}{CD}$，只要証明 AC，BC 和 BC，CD 为一对相似三角形的两組对应边即可. 为此，連結 BD，得 $\triangle BDC$. 現在研究 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BDC$ 是否相似.

$\triangle ABC$ 是已知等腰三角形，因此

$$\angle A = 180° - 2\angle C. \qquad (1)$$

$\because$ BC 和 BD 是同圓的半徑，$\therefore$ $BC = BD$，

$\triangle BDC$ 也是等腰的. 因此

$$\angle DBC = 180° - 2\angle C. \qquad (2)$$

从而 $\angle A = \angle DBC$.

根据例 1 知 $\triangle ABC \backsim \triangle BDC$，

$$\therefore \quad \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CD}.$$

为了表明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BDC$ 的边角对应关系，我們把一个图里的三角形分成两个图（图 1·43），請讀者指出它們的对应边和对应角.

証明請讀者自己来完成.

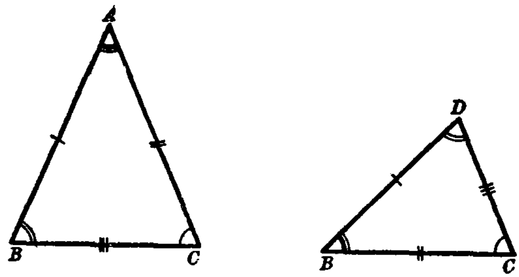


图 1·43

例 4. $\triangle ABC$ 的內角平分綫 AD 延长后交外接圓于 E，求証 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AE}{AC}$（图 1·44）.

分析 要証 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AE}{AC}$，只要証明 AB, AE 和 AD, AC 是两个相似三角形的两組对应边就可以了．为此，連結 BE，得 $\triangle ABE$．現在研究 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADC$ 是否相似．

$\because$ $\angle BEA$ 和 $\angle DCA$ 是同弧上的圓周角，

$$\therefore\quad \angle BEA=\angle DCA. \tag{1}$$

$\because$ AD 是內角平分綫，

$$\therefore\quad \angle BAE=\angle DAC. \tag{2}$$

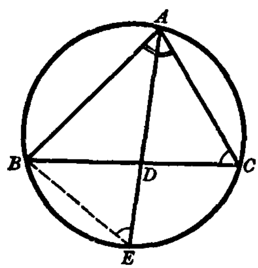


图 1·44

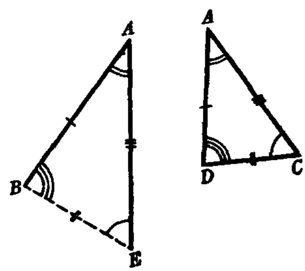


图 1·45

从(1)，(2)两式，依据三角形相似判定定理 1，可以断定

$$\triangle ABE\backsim\triangle ADC,$$

从而有

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}.$$

为了表明 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADC$ 的边角間的对应关系，我們把一个图分成

两个图(图1·45).

証明請讀者自己来完成.

三角形相似判定定理2 如果一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边成比例,并且夹角相等,那末这两个三角形相似.

已知 在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中,$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$,$\angle A=\angle A'$(图1·46).

求証 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

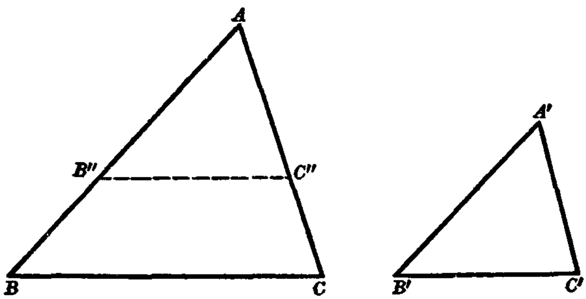


图 1·46

【証】 在AB上取B'',使$AB''=A'B'$(如果$AB<A'B'$,那末在$A'B'$上取B''使$A'B''=AB$). 过B''引$B''C''\parallel BC$, $B''C''$交AC于C''. 依据預备定理,

$$\triangle AB''C''\backsim\triangle ABC,$$

所以

$$\frac{AB}{AB''}=\frac{AC}{AC''}. \tag{1}$$

但

$$AB''=A'B', \tag{2}$$

故(1)式可以写为

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{AC''}. \tag{3}$$

将(3)式与已知比例$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$比較,得

$$AC''=A'C'. \tag{4}$$

由已知 $\angle A=\angle A'$ 以及(2)和(4)式,依据三角形全等判定定理 2,得

$$\triangle AB''C''\cong\triangle A'B'C'.$$

$$\therefore\quad \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'.$$

例 5. 已知綫段 AA' 和綫段 BB' 相交于点 O, $OA=3\text{ cm}$, $OA'=2\text{ cm}$, $OB=4.5\text{ cm}$, $OB'=3\text{ cm}$. 求証 $AB\parallel A'B'$ (图 1·47).

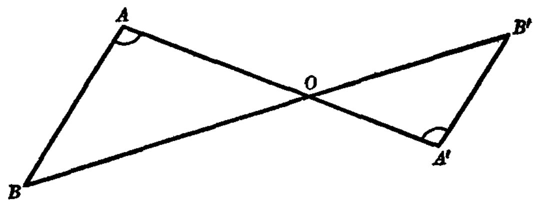


图 1·47

【証】 $\because\quad \dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{3}{2},\qquad \dfrac{OB}{OB'}=\dfrac{4.5}{3}=\dfrac{3}{2},$

$$\therefore\quad \frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}.$$

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle A'OB'$ 中,有 $\angle AOB=\angle A'OB'$ (对頂角),

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}.$$

依据三角形相似判定定理 2, 得

$$\triangle AOB\backsim\triangle A'OB'.$$

依据相似三角形对应角相等的性质得 $\angle OAB=\angle OA'B'$. 再依据平行綫判定定理得 $AB\parallel A'B'$.

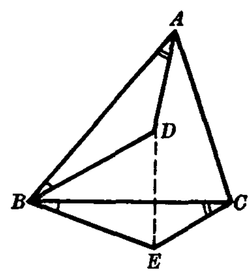


图 1·48

例 6. 在三角形 ABC 内取一点 D, 連接 AD 和 BD. 在 BC 边上并在原形以外作三角形 BCE, 使

$$\angle EBC=\angle ABD,\quad \angle ECB=\angle DAB \text{ (图 1·48)}.$$

求証 $\triangle DBE\backsim\triangle ABC$.

【証】 連接 DE, 在 $\triangle DBE$ 与 $\triangle ABC$ 中,

$$\angle DBE=\angle EBC+\angle CBD,$$
$$\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC.$$
$$\because\quad \angle ABD=\angle EBC,$$
$$\therefore\quad \angle DBE=\angle ABC. \tag{1}$$

由已知条件,在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CBE$ 中,已有

$$\angle EBC=\angle ABD,\quad \angle ECB=\angle DAB,$$
$$\therefore\quad \triangle ABD\backsim\triangle CBE,$$

可知
$$\frac{BE}{BD}=\frac{BC}{AB}. \tag{2}$$

在 $\triangle DBE$ 与 $\triangle ABC$ 中, 从(1)与(2)知有一角对应相等, 且夹这角的两边成比例,那么根据三角形相似的判定定理 2, 便有

$$\triangle DBE\backsim\triangle ABC.$$

例 7. 已知 A, B 和 C, D 分别是 $\angle O$ 两边 OX 和 OY 上的点,并且 $OA\cdot OB=OC\cdot OD$. 証明 A, B, C, D 四点在同一个圓上(图 1·49).

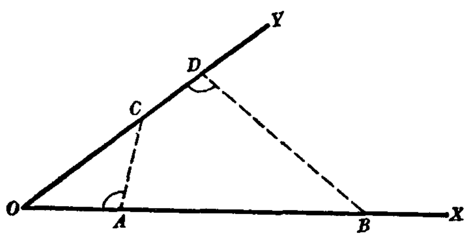


图 1·49

【証】 已知等式 $OA\cdot OB=OC\cdot OD$ 可以改写成比例

$$\frac{OA}{OD}=\frac{OC}{OB},$$

連結 AC 和 BD.

在 $\triangle OAC$ 和 $\triangle ODB$ 中: $\angle AOC=\angle DOB$, $\frac{OA}{OD}=\frac{OC}{OB}$. 依

据三角形相似判定定理 2, 得 $\triangle OAC \backsim \triangle ODB$. 从而

$$\angle OAC = \angle ODB.$$

以前学习过,如果一个四边形的一个外角等于它的內对角,那末这个四边形可以內接于一个圓. 据此, 四边形 $ABDC$ 可以內接于一个圓,卽 A, B, C, D 四点在同一个圓上.

注意 請讀者研究这个例題和本节例 2 的关系.

三角形相似判定定理 3 如果一个三角形的三条边和另一个三角形的三条边成比例,那末这两个三角形相似.

已知 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}$ (图 1 50).

求証 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

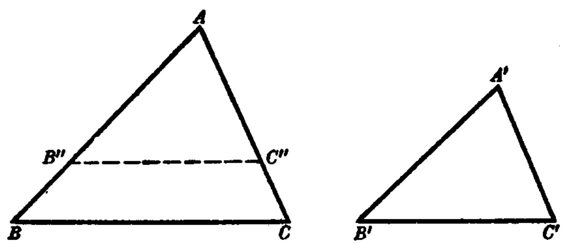


图 1·50

【証】 在 AB 上取 B'', 使 $AB''=A'B'$ (如果 $AB<A'B'$, 那末在 $A'B'$ 上取 B'' 使 $A'B''=AB$). 过 B'' 引 $B''C'' \parallel BC$, 交 AC 于 C''. 依据預备定理,有 $\triangle ABC \backsim \triangle AB''C''$. 从而有

$$\frac{AB}{AB''}=\frac{BC}{B''C''}=\frac{CA}{C''A}. \tag{1}$$

$$\because \quad AB''=A'B', \tag{2}$$

$\therefore$ (1)式成为

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B''C''}=\frac{CA}{C''A}. \tag{3}$$

将(3)式和已知比例 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$ 比較，得

$$B''C''=B'C', \tag{4}$$

$$C''A=C'A'. \tag{5}$$

由(2)，(4)，(5)式，依据三角形全等判定定理1，得

$$\triangle AB''C''\cong\triangle A'B'C',$$

从而 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

例8. 已知 D, E, F 分别是 $\triangle ABC$ 三边 BC, CA, AB 的中点，求証 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$（图1·51）.

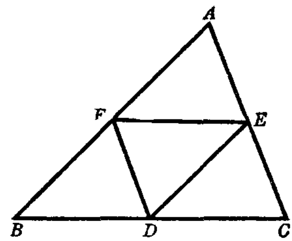


图 1·51

【証】 綫段 EF, FD, DE 都是 $\triangle ABC$ 的中位綫．我們已經学习过，三角形的中位綫平行于底并且等于底的一半．据此即有

$$EF=\frac{1}{2}BC,\quad FD=\frac{1}{2}CA,\quad DE=\frac{1}{2}AB.$$

即

$$\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CA}=\frac{DE}{AB}=\frac{1}{2}.$$

依据三角形相似判定定理3，得

$$\triangle ABC\backsim\triangle DEF.$$

注意 三角形相似判定定理是十分重要的．在依据这些定理判定两个三角形相似的同时，我們推出了在一个图形中，某些綫段的量数的关系式（象例3，例4），判定两直綫平行（象例5），証明四点在同一个圓上（象例7）．以后还要进一步来研究这些判定定理的应用．

三角形相似判定定理和三角形全等判定定理都是初等几何里的重要定理．判定两个三角形相似和判定两个三角形全等，在条件方面讲是有些类似的，但是判定两个三角形相似只需两个独立条件，判定两三角形全等必需三个独立条件，并且在三个条件里至少有一个是关于边的条件．請讀者把三角形的相似判定定理和全等判定定理的內容作比較和联系，这样做对理解和掌握这些定理是有帮助的．

习　题　1·7

1. 下列說法是否正确？

(1) 两个全等的三角形是相似的；

(2) 两个鈍角三角形是相似的；

(3) 所有的等边三角形都相似；

(4) 所有的直角三角形都相似；

(5) 所有的等腰三角形都相似。

2. 在梯形 $ABCD$ 中，对角綫 AC 和 BD 交于点 E，$\triangle ABE$ 与 $\triangle CDE$ 是不是相似三角形？$\triangle AED$ 与 $\triangle BEC$ 又怎样？为什么？

3. 設下列数值为两个三角形的边长，这两个三角形是否相似？

(1) 1 m, 1.5 m 和 2m；10 cm, 15 cm 和 20 cm；

(2) 1 m, 2 m 和 1.5 m；12 dm, 8 dm 和 16 dm；

(3) 1 m, 2 m 和 1.25 m；10 cm, 9 cm 和 16 cm。

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=15$ 寸，$AC=20$ 寸。在 AB 上截取 $AD=6$ 寸，在 AC 上截取 $AE=12$ 寸。$\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 是否相似？如果 AB, AC 和 AD 的长都不变，但 $AE=8$ 寸，那么 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 是否相似？

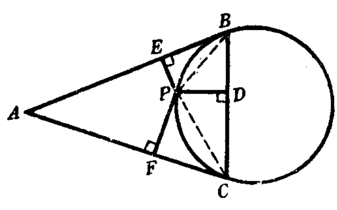
5. 如果一个圓过 $\triangle ABC$ 的頂点 B 和 C，并且分别交 AB 和 AC 于 D 和 E。那么 $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AE}{AB}$。

6. 如果两条綫段 AB 和 CD 相交于 E，且 $AE\cdot BE=CE\cdot DE$。那么 A, B, C 和 D 四点共圓。

7. 二圓 O 与 O' 相交于 A 和 B 两点，圓 O 的切綫 AC 交圓 O' 于 C，圓 O' 的切綫 AD 交圓 O 于 D。求証 $AB^2=BC\cdot BD$。

8. 已知一个三角形的两边和其中一边上的中綫与另一个三角形的相当部分成比例，求証这两个三角形相似。

9. 由圓外一点至圓引二切綫及一割綫，割綫和圓周的两个交点和两切点連成一个四边形，証明这四边形的两对边的乘积相等。



(第 10 題)

10. 如果从圓外一点 A 引切綫 AB 和 AC，B 与 C 是切点。在圓上任取一点 P，作 $PD\perp BC$，$PE\perp AB$，$PF\perp AC$，而 D, E 和 F 分别是垂足。那么，

$$PD^2=PE\cdot PF.$$

[提示：連接 PB 和 PC，根据弦切角的定理証明 $\angle PBE=\angle PCD$，从而推得 $\triangle PEB\backsim\triangle PDC$，即有 $\frac{PE}{PD}=\frac{PB}{PC}$；同法再証 $\frac{PD}{PF}=\frac{PB}{PC}$，这样便可得到 $\frac{PE}{PD}=\frac{PD}{PF}$.

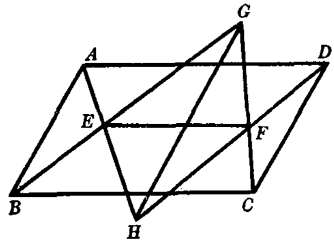
本題也可以从証明 $\triangle PED\backsim\triangle PDF$ 入手；其中要利用四点共圓以及弦切角的关系.]

11. 已知 E 是圓內接四边形 $ABCD$ 的对角綫 BD 上的一点，并且 $\angle BAE=\angle CAD$；求証：

(1) $AB\cdot CD=AC\cdot BE$；

(2) $AD\cdot BC=AC\cdot ED$.

12. 綫段 EF 平行于 $\square ABCD$ 的一边 AD. BE 同 CF 交于一点 G，AE 同 DF 交于一点 H. 求証 $GH\parallel AB$.

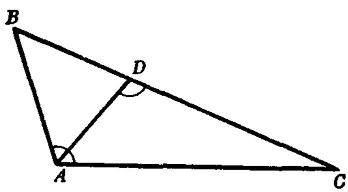


(第 12 題)

13. 已知一个三角形的各边的比为 2 : 5 : 6，和它相似的另一个三角形的最大边为 15 厘米. 求这三角形其他两边的长.

14. 在两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 中，已知 $\angle A=\angle A'$，$\angle C=\angle C'$，$BC=17.5$ cm，$B'C'=7$ cm，$AB=12.5$ cm. 求 $A'B'$ 之长.

15. 如图. $AC=12$ cm，$BC=16$ cm，$\angle BAC=\angle ADC$. 求 DC 之长.



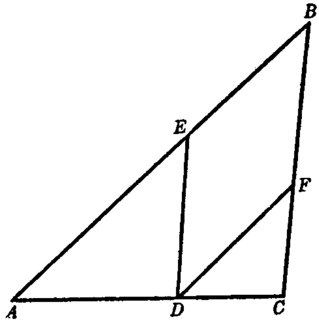
(第 15 題)

16. 已知一菱形內接于平行四边形，它的各边和平行四边形的对角綫平行. 如果平行四边形的对角綫的长为 l 与 m，求菱形的边长.

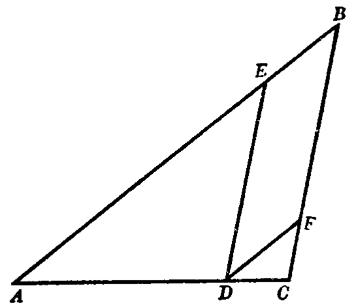
17. 在腰为 100 分米，底为 60 分米的等腰三角形中作一內切圓，求在两腰上二切点間的距离.

[提示：設法証明这二切点連綫平行底边.]

18．如图．$DEBF$ 为 $\triangle ABC$ 的內接菱形，如果 $AB=18$ cm，$AC=BC=12$ cm．求菱形的边长．



(第 18 題)



(第 19 題)

19．如图．$DEBF$ 为 $\triangle ABC$ 的內接平行四边形，且 $DE:DF=2:1$．已知 $AB=6$ cm，$BC=4$ cm．求平行四边形各边的长．

20．已知相似比为 $\frac{1}{2}$，求作一矩形使它和已知的矩形相似．

21．求作一个三角形，使它的一边等于已知边，且和已知三角形相似．

22．取相似比等于 2，作出一菱形，使与已知的菱形相似．

23．設 $\square ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=b$．作一和 AB 平行的直綫 EF，使它截成的平行四边形 $ABEF$ 和 $ABCD$ 相似．

§1·8 相似直角三角形的判定

直角三角形是一般三角形的特例，因此有些判定两个直角三角形相似的方法，可以看做是判定两个一般三角形相似方法的特例．我們来看下面的两条定理：

直角三角形相似判定定理 1 如果一个直角三角形的一个銳角和另一个直角三角形的一个銳角相等，那末这两个直角三角形相似．

直角三角形相似判定定理 2 如果一个直角三角形的两条直角边和另一个直角三角形的两条直角边成比例，那末这两个直角

三角形相似.

現在我們把这两条定理的內容和一般三角形相似判定定理 1 和 2 的內容作比較.

一般三角形相似判定定理 1 的条文是:“如果一个三角形的两个角和另一个三角形的两个角对应相等，那末这两个三角形相似”. 現在把条文里的“两个角”三字都换成“一个直角和一个銳角”,那末这样所得定理的內容和直角三角形相似判定定理 1 的內容完全一致,只是条文上略有出入.

一般三角形相似判定定理 2 的条文是:“如果一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边成比例,并且夹角相等,那末这俩个三角形相似”. 現在把条文里的“夹角相等”四个字换成“夹角是直角”,那末这样所得定理的內容和直角三角形相似判定定理 2 的內容完全一致,只是在条文上略有出入.

由此可見,直角三角形相似判定定理 1 和 2, 实质上分别是一般三角形相似判定定理 1 和 2 的特例，因此对这两条定理沒有再加詳細証明的必要.

判定两直角三角形相似还有下面的定理:

直角三角形相似判定定理 3 如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边成比例，那末这两个直角三角形相似.

已知 直角三角形 ABC 和 $A'B'C'$. $\angle C$, $\angle C'$ 都是直角，且 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$ (图 1·52).

求証 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

【証】 在 AB 上取 B'' 使

$$AB''=A'B' \qquad (1)$$

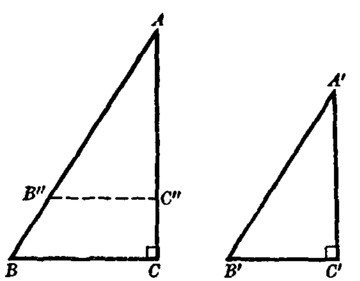


图 1·52

(如果 $AB<A'B'$, 那末在 $A'B'$ 上取 B'', 使 $A'B''=AB$). 过 B'' 引

$B''C'' \parallel BC$，交 AC 于 C''. 依据§1·7预备定理，得

$$\triangle ABC \backsim \triangle AB''C'',$$

从而有

$$\frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''}. \tag{2}$$

由(1)，(2)式可得

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AC''}. \tag{3}$$

将已知比例 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ 与(3)式比較，得

$$AC'' = A'C'. \tag{4}$$

由(2)，(4)两式，依据直角三角形全等判定定理得

$$\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'.$$

但 $$\triangle AB''C'' \backsim \triangle ABC,$$

从而

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'.$$

例 1. 已知 AD, BE 是 $\triangle ABC$ 的高，H 是 AD，BE 的交点（图1·53）. 求証：

(1) $AD \cdot BC = BE \cdot AC$，

(2) $AH \cdot HD = BH \cdot HE$.

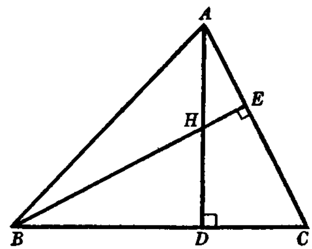


图 1·53

分析 (1)要証明 $AD \cdot BC = BE \cdot AC$，只要証明 $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC}$. 現在 AD，AC 和 BE，BC 分别是直角三角形 ADC 和 BEC 的直角边和斜边，只要能証明 $\triangle ADC \backsim \triangle BEC$，那么比例 $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC}$ 就成立了. 直角三角形 ADC 和 BEC 有一个銳角 C 相等，根据直角三角形相似判定定理1，可見它們是相似的.

(2) 要証明 $AH \cdot HD = BH \cdot HE$，只要証明 $\frac{AH}{BH} = \frac{HE}{HD}$. 現在 AH，HE 和 BH，HD 分别是直角三角形 AHE 和 BHD 的斜边和直角边，只要能証明 $\triangle AHE \backsim \triangle BHD$，那么比例 $\frac{AH}{BH} = \frac{HE}{HD}$ 就成立了. 在直角三角形

AHE 和 BHD 里，銳角 AHE，BHD 是对頂角，因此相等．从而

$$\triangle AHE \backsim \triangle BHD.$$

【証】 (1)在直角三角形 ADC 和 BEC 中，

$$\angle ACD = \angle BCE,$$

$$\therefore\quad \triangle ADC \backsim \triangle BEC.$$

从而得
$$\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC},$$

即
$$AD \cdot BC = BE \cdot AC.$$

(2)在直角三角形 AHE 和 BHD 中，

$$\angle AHE = \angle BHD.$$

$$\therefore\quad \triangle AHE \backsim \triangle BHD.$$

$$\therefore\quad \frac{AH}{BH} = \frac{HE}{HD},$$

即
$$AH \cdot HD = BH \cdot HE.$$

例 2. 已知两个直角梯形的两底与一条对角綫分别对应成比例，求証这两个梯形是相似的．

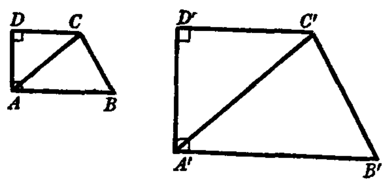


图 1·54

【証】 如图 1·54 在梯形 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 中，

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

$$\because\quad \angle D = \angle D' = d,$$

可知 $\triangle ACD$ 与 $\triangle A'C'D'$ 是直角三角形，根据直角三角形判定定理 3，应有 $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$．因此 $\angle CAD = \angle C'A'D'$，从而

$\angle CAB=\angle C'A'B'$. 再由已知 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$，根据相似三角形判定定理 2，即得$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$. 再注意到$\triangle ACD\backsim\triangle A'C'D'$，显然有

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{DC}{D'C'},$$

以及 $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$\angle D=\angle D'$.

也就是說，梯形 $ABCD\backsim$ 梯形 $A'B'C'D'$.

注意 上例的証明中，省掉了一些显然的理由的叙述.

习 題 1·8

1. 已知 AD 是直角三角形 ABC 斜边 BC 上的高，求証

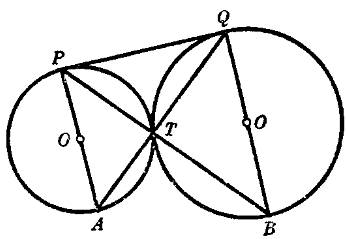
$$\triangle ABC\backsim\triangle DBA\backsim\triangle DAC.$$

2. 設 $\triangle ABC$ 是鈍角三角形，如果 AD，BE 和 CF 是 $\triangle ABC$ 的三条高，那么

$$AD\cdot BC=BE\cdot CA=CF\cdot AB.$$

3. 在上題中，如果 H 是垂心. 求証这个图形中的大大小小共 12 个直角三角形可以分成三組，每組四个三角形彼此相似.

4. 两圓外切，求証外公切綫是两圓直徑的比例中項.



(第 4 題)

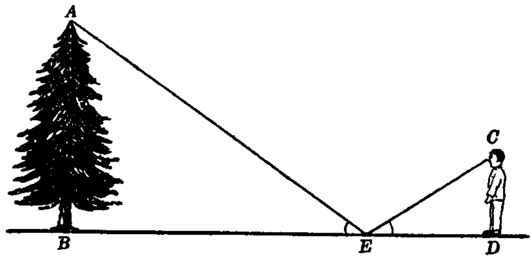
[提示：如图. 設二圓的切点为 T，外公切綫为 PQ，PA 与 QB 分别是二圓直徑. 設法証明 $\triangle APQ\backsim\triangle PQB$.]

5. 由圓外一点 P，向圓引割綫 PAB 与切綫 PC，再从 A 和 B 至 PC 引垂綫 AL，BM，由 C 至 AB 引垂綫 CN. 求証 $AL\cdot BM=CN^2$.

6. 工厂烟囱的影长为 35.8 米时，垂直插入地中的杆，地上部分长 1.90 米，而杆的影长是 1.62 米. 求烟囱的高.

7. 要测树 AB 的高，一个人把一面鏡子放在离树 5 米的点 E，望着鏡子向后退到点 D，这时恰好在鏡子里望到树梢点 A. 量得 ED 为 2.1 米，并且知道人的眼睛距地面的高度为 1.5 米，求树高.

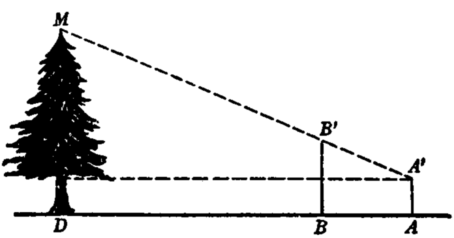
［提示：根据光学中的反射定律，$\angle AEB=\angle CED$.］



（第 7 题）

8. 为了测量树高 DM，在平地上找出与树足 D 成一直綫的两点 A 和 B，現竪立两根杆 AA' 和 BB'，使 A' 和 B' 与树梢 M 在一直綫上. 如果設 $AD=m$, $AB=n$, $AA'=a$, $BB'=b$，求树高.

若已知 $m=22.5\ \mathrm{m}$, $n=1.25\ \mathrm{m}$, $a=1.75\ \mathrm{m}$, $b=2.55\ \mathrm{m}$，那么树高多少？

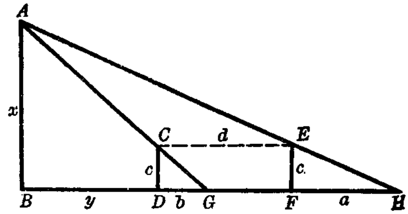


（第 8 題）

*9. 有人望海島（AB），立两表（即标杆 CD 和 EF）齐高三丈（c），前后相去千步（d）. 从前表退行一百二十三步（b），人目着地（G），望島峰（A）恰与表頂相合. 从后表退行一百二十七步（a），人目着地（H），再望島峰（A），也与表頂（E）相合. 求島高（AB）和距前表的远（BD）.

［解：假設海島的高 $AB=x$，島与前表的距离 $BD=y$. 如图. 按照題中的已知条件，可知有相似的直角三角形：

$$\triangle ABG \backsim \triangle CDG, \qquad \triangle ABH \backsim \triangle EFH;$$



（第9题）

由此就得到：

$$\frac{y+b}{b}=\frac{x}{c} \quad 与 \quad \frac{y+d+a}{a}=\frac{x}{c},$$

这两式相减，有方程：

$$\frac{y+b}{b}-\frac{y+d+a}{a}=0.$$

也就是，
$$\frac{y}{b}-\frac{y+d}{a}=0.$$

解出方程中的 y，
$$y=\frac{bd}{a-b}.$$

把 y 的值代入前两式中的任一个，即得

$$x=\frac{cd}{a-b}+c.$$

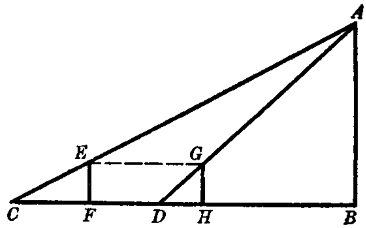
按照我国古制，1步＝6尺，1里＝300步．代入計算，即得

$$x=4\text{ 里 }55\text{ 步}, \qquad y=102\text{ 里 }150\text{ 步}.$$

所以本題的答案是：島高4里55步，島距前表102里150步（古制）．

注：这个题目是我国古代数学家刘徽所著"海島算經"（公元263年）中的第一題．在海島算經里一共有九个題目．刘徽注"九章算术"后，即在篇末列上这九个題目，并附有算法和答案．他称这种算法为"重差术"．后人因为其中第一題有望海島之句，所以又称为"海島算經"．这些問題都是讲測量方法的，可惜当时只从三角形的边上着想，沒有研究角与边的关系，不然的話，三角学在我国也会很早就发生了．］

10．要測海島 AB 的高，在海边立2丈高的竿 GH．在 D 处人眼着地，見竿尖与島頂相合，量得 $DH=32$ 尺．退行到距 H 20丈 F 处，再立同样高的竿 EF，又在 C 处人眼着地，見竿尖与島頂相合．量得 $CF=48$ 尺．求島高 AB 以及第一根竿距海島的远 HB（图附后）．



(第 10 题)

§1·9 相似三角形的性质

两个相似三角形最突出的性质，就是它們的对应角相等和对应边都成比例（或者每一組对应边的比等于这两个三角形的相似比）. 以这些性质作主要依据,我們还可推出相似三角形的另外一些性质.

相似三角形周长的比定理 相似三角形的周长（三角形三边的和）的比等于它們的相似比（相似三角形一組对应边的比）.

已知 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ (图1·55).

求証 $\dfrac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=\dfrac{AB}{A'B'}$.

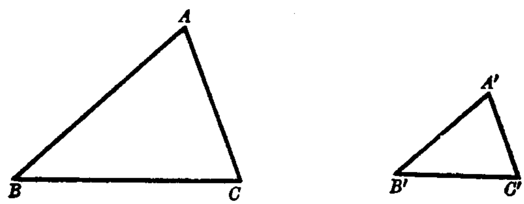


图 1·55

【証】 $\because \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$,

$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}. \tag{1}$$

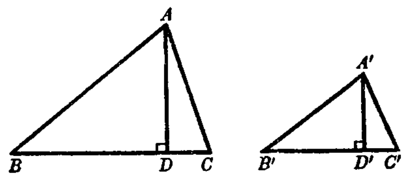
对等式(1)应用等比定理,得

$$\frac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

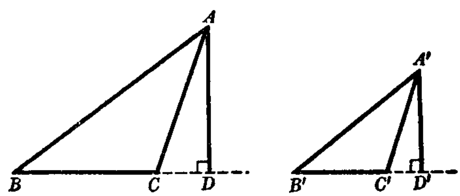
相似三角形对应高的比定理　相似三角形对应高的比等于它們的相似比.

已知　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$. $AD \perp BC$, $A'D' \perp B'C'$(图 1·56 (1)或(2)).

求証　$\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}$.



(1)



(2)

图 1·56

【証】　$\because \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$,

$\therefore \quad \angle B=\angle B'$.

在直角三角形 ABD 和 $A'B'D'$ 中，$\angle B=\angle B'$. 依据直角三角形相似判定定理 1, 得

$$\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'.$$

从而有
$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

三角形的周长和高都是和三角形有关的綫段. 和三角形有关的綫段还有中綫,角平分綫,……等. 可以証明,两个相似三角形的对应边上的中綫的比,或者对应角的平分綫的比,……都等于它們

的相似比．一般讲，相似三角形对应綫段的比等于它們的相似比．

例 1． 試証，相似三角形外接圓直徑的比等于它們的相似比．

已知 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$．$AD$ 和 $A'D'$ 分别为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的外接圓直徑(图 1·57)．

求証 $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}$．

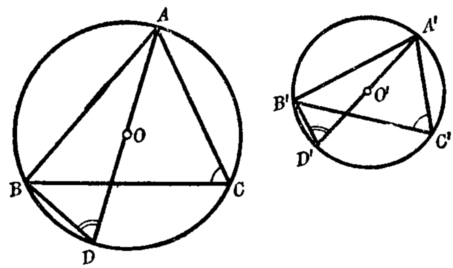


图 1·57

【証】 連結 BD 和 $B'D'$，得直角三角形 ABD 和 $A'B'D'$．

$$\because \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C',$$

$$\therefore \quad \angle C=\angle C'.$$

从而
$$\angle D=\angle D'.$$

直角三角形 $ABD \backsim$ 直角三角形 $A'B'D'$，

所以
$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

例 2． 在 $\triangle ABC$ 中，$AC=2\,\mathrm{m}$，$BC+CA+AB=8\,\mathrm{m}$，圓 O 为 $\triangle ABC$ 的內切圓．点 D 和 E 分别为边 AB 和 BC 上的点，且 $DE \parallel AC$，DE 与圓 O 相切．求綫段 DE 的长(图 1·58)．

【解】 假定 $\triangle ABC$ 的內切圓 O 切三边 BC，CA 和 AB 于 G，H 和 K，切 DE 于 L．由切綫的性质得

$$AK=AH, \quad CG=CH;$$

$$DK=DL, \quad EG=EL.$$

所以 $\triangle BDE$ 的周长为

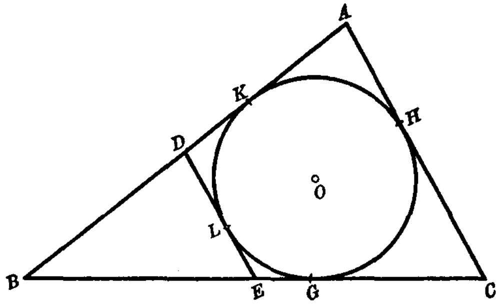


图 1·58

$$
\begin{aligned}
BD+DE+EB&=BD+(DL+LE)+EB\\
&=BD+DK+EG+EB=BK+BG\\
&=(BA-KA)+(BC-GC)\\
&=BA+BC-AH-HC\\
&=BA+BC-(AH+HC)\\
&=BA+BC-AC\\
&=BA+AC+BC-2AC.
\end{aligned}
$$

$\because\quad AC=2\,\mathrm{m},\quad BA+BC+AC=8\,\mathrm{m},$

$\therefore\quad BD+DE+EB=4\,\mathrm{m}.$

$\because\quad DE\parallel AC,\qquad \therefore\quad \triangle ABC\backsim\triangle DBE.$

∴ 这两个三角形对应边的比等于周长的比，于是

$$\frac{DE}{AC}=\frac{4\,\mathrm{m}}{8\,\mathrm{m}}.\qquad 得\quad DE=1\,\mathrm{m}.$$

例 3. 求作一个三角形，使它和一已知 $\triangle ABC$ 相似，并使所作的三角形的周长为定綫段 m.

已知 $\triangle ABC$ 和綫段 $MN=m$ (图 1·59).

求作 相似于 $\triangle ABC$、并且三边之和为 MN 的三角形.

作法 过点 M 引任意射綫 MM'，在 MM' 上取点 P, Q, M'，使 $MP=BC$, $PQ=CA$, $QM'=AB$. 連結 $M'N$，过点 P, Q 引

PD, QF 各平行于 $M'N$，分别交 MN 于 D, F. 以 MD, DF 与 FN 为三边作 $\triangle MDE$，那末 $\triangle MDE$ 就是所求的三角形.

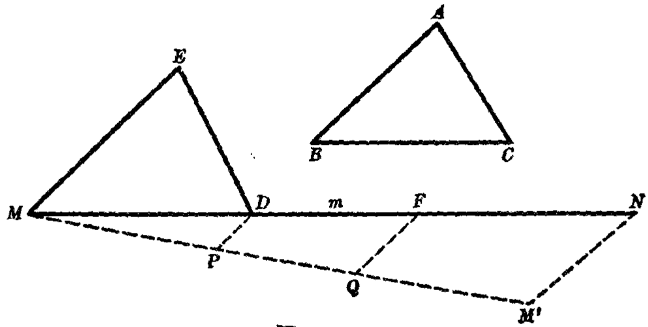


图 1·59

【証】 由作法，

$$MD+DE+EM=MD+DF+FN=MN=m.$$

$$\because \quad MD:DE:EM=MD:DF:FN$$

$$=MP:PQ:QM'=BC:CA:AB,$$

$$\therefore \quad \triangle EMD \backsim \triangle ABC.$$

$\therefore$ $\triangle EMD$ 就是求作的三角形.

习 题 1·9

1. 相似三角形对应边上的中綫以及对应角的平分綫，都和它們的对应边成比例.

2. 相似三角形內切圓半徑的比，等于它們对应的旁切圓半徑的比.

3. 已知 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$D$ 与 D' 为 AB 或 AC 与它对应边 $A'B'$ 或 $A'C'$ 上的任意点，$\angle BDC=\angle B'D'C'$. 求証

$$\frac{BD}{B'D'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}.$$

*4. 在习题 1·8 的第 3 题中，求証：

(1) $AH\cdot HD=BH\cdot HE=CH\cdot HF$;

(2) $BH\cdot HE+CH\cdot HF=BC^2$.

5. 如果两个銳角三角形中有一角对应相等，从另一对应頂点所作的高与等角的对边成比例，那末这两个三角形相似. 如果把上述条件中的高换为

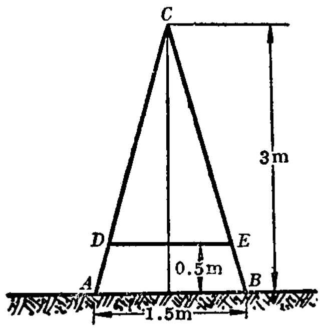
中綫或角平分綫又怎样?

6. 如果两个三角形的对应边都是平行的，或都是垂直的. 証明这两个三角形相似.

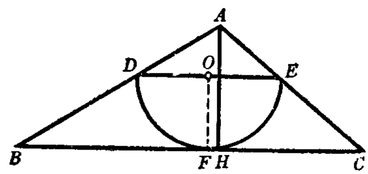
7. 已知 $\triangle ABC$ 的三高 AD, BE 和 CF 相交于 H. 求証

$$DA\cdot DH=DE\cdot DF.$$

8. 在图中那样的架子上修軍用桥. 为了使桥的重量均匀地压在地基上，架子的底部釘在板上，并且把每对脚用横木 DE 連起来. 如果架高 3 m，板寬 $AB=1.5$ m，而横木釘在高出 AB 为 0.5 m 的地方. 求 DE 的长.



(第 8 題)



(第 9 題)

9. 已知 $\triangle ABC$ 的高 $AH=10$ cm，底 $BC=30$ cm. 內接半圓的直徑 $DOE \parallel BC$，切 BC 于 F. 求內接半圓的半徑 OD.

10. 求作与已知三角形 ABC 相似的三角形 $A'B'C'$，并且分別使它的 (1) 中綫 $A'M$; (2)高 $A'D$; (3)角平分綫 $A'T$; (4)內切圓半徑 r; (5)外接圓半徑 R, 各等于已知綫段 a.

§1·10 比例規和对角綫尺

依据比例綫段和相似三角形的原理，可以制作比例規和对角綫尺——两种常見的画图工具. 下面介紹比例規和对角綫尺的构造原理和应用方法.

1. 比例規 比例規的主要作用是按一定的比迅速地放大和縮小已知綫段. 它由长度相等的两脚 AD 和 BC 构成 (图 1·60). 两脚的两端都是尖的，两脚中間都有一条纵沟，沟內装有一个螺絲釘 O. 螺絲釘放松时，它可以在沟內滑动，螺絲釘轉紧时，它可以固定在沟的任何地方. 螺絲釘的位置固定在点 O 后，两脚可以繞 O 轉动. 在纵沟的旁边刻有数字，这个数字表示 $\frac{OA}{OD}$ 或 $\frac{OB}{OC}$ 的值.

如果要縮小綫段 l 成为 $\frac{1}{3}l$. 先把螺絲釘 O 固定在两条纵沟边都刻有"3"字的位置，然后把两脚分开，使尖端 A, B 分别落在綫段 l 两个端点. 这时 $\angle AOB$ 和 $\angle DOC$ 因对頂角而相等，即等腰三角形 OAB 和 ODC 的頂角相等. 依据 §1·7 例1知

$$\triangle OAB \backsim \triangle ODC.$$

从而有

$$\frac{CD}{AB}=\frac{OD}{OA}=\frac{1}{3},$$

$$CD=\frac{1}{3}AB.$$

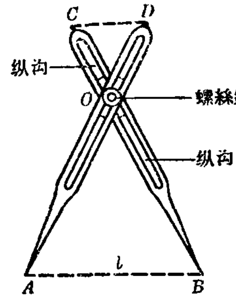


图 1·60

即比例規的 C, D 两个尖端所决定的綫段是按定比 3 縮小 l 的綫段. 这时，把比例規倒轉过来，在綫段 l 上，从一端起連續截取等于 CD 的綫段，这样就可把綫段 l 三等分.

如果要放大綫段 l 为 $3l$，那末仍旧把螺絲釘固定在两条纵沟边都刻有 3 字的位置上，然后把两脚分开，使尖端 C, D 分别落在綫段 l 的两个端点. 根据前面同样的理由，比例規的 A, B 两个端点所决定的綫段是按定比 3 放大 l 的綫段.

利用比例規放大和縮小綫段时，原綫段和它的放大綫段或縮小綫段的长度还須用有刻度的直尺来量，并且这些綫段的长度必須在比例規两脚尖端所能指的范圍以內.

2. 对角綫尺 画地图或平面图时，常按一定的比将两点間的实际距离縮繪在图上. 例如地面上长 50 米的綫段，縮繪在 1:5000 的地图上就成为长 1 厘米的綫段$\left(5000\times\frac{1}{5000}\right)$，地面上长 347 米的綫段也将縮繪为长 6.94 厘米的綫段$\left(34700\times\frac{1}{5000}\right)$. 但是一般直尺上的刻度只刻到 $\frac{1}{10}$ 厘米为止，要量出一条长度精确到 $\frac{1}{100}$ 厘米的綫段，象 6.94 厘米，就不可能了. 要这样做就得应用对角綫尺.

对角綫尺是根据比例綫段的原理制作的. 图 1·61 表示按定比 1:5000 縮画綫段的对角綫尺的一部分. 在尺上 ABB_1A_1, $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, …都是全等的正方形.

綫段 AB, AA_1, A_1A_2, …都等于 2 厘米，它們每一条代表的距离为 100 米(0.02×5000).

綫段 AA_1, BB_1 各分为 10 等分，每个等分都等于 0.2 厘米，它們代表的距离为 10 米(0.002×5000)。

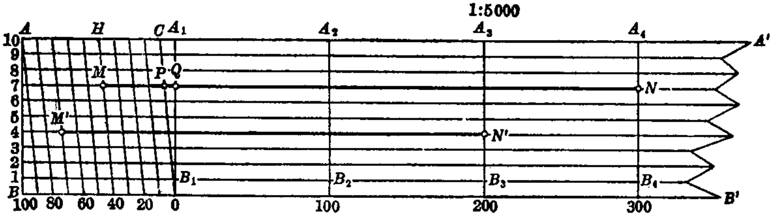


图 1·61

綫段 AA_1 的每一个分点和綫段 BB_1 的对应点的右边一个分点連結成一組斜平行綫.

綫段 AB 也分为 10 等分，經过每一个分点有一条平行于尺边 AA' 的直綫. 現在研究这些直綫被直角三角形 CA_1O 所截的情形. 为了清楚起見，把这个三角形放大画在图 1·62 里. 这里有一組平行于 CA_1 的直綫，把 A_1B_1 分为 10 等分. 因此

$$\frac{DE}{CA_1}=\frac{B_1E}{B_1A_1}=\frac{1}{10},\quad DE=\frac{1}{10}CA_1=\frac{1}{50}\ (\text{厘米}).$$

DE 代表的距离为 1 米 $\left(\frac{1}{5000}\times 5000\right)$.

$$\frac{FG}{CA_1}=\frac{B_1G}{B_1A_1}=\frac{2}{10},\quad FG=\frac{2}{10}CA_1=\frac{2}{50}\ (\text{厘米}).$$

FG 代表的距离为 2 米 $\left(\frac{2}{5000}\times 5000\right)$.

··.

$$\frac{PQ}{CA_1}=\frac{B_1Q}{B_1A_1}=\frac{7}{10},\quad PQ=\frac{7}{10}CA_1=\frac{7}{50}\ (\text{厘米}).$$

PQ 代表的距离为 7 米 $\left(\frac{7}{5000}\times 5000\right)$.

··.

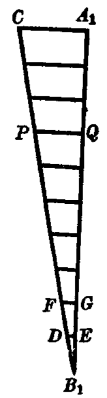


图 1·62

現在注意图 1·61 (对角綫尺)上的綫段 MN.

$MN=QN+MP+PQ$. 綫段 $QN=A_1A_4=6$ 厘米，它代表的距离为 300 米，綫段 $MP=HC=\frac{4}{10}AA_1=0.8$ 厘米，它代表的距离为 40 米，綫段 $PQ=\frac{7}{50}$ 厘米，它代表 7 米. 因此 $MN=6.94$ 厘米，它代表的距离为 347 米.

如果用分割規在对角綫尺上截取綫段 MN，这就是实际长度为 347 米的綫段按定比 1:5000 縮小的綫段。

在图 1·61 里还有一条綫段 $M'N'$，請讀者自己証明这条綫段代表的距离是 274 米.

用对角綫尺画图时，原綫段的长度是已知的，按定比縮小的綫段的长度可在尺上求得.

习 題 1·10

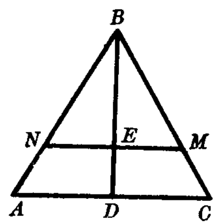
1. 怎样的两个多边形叫做相似多边形？怎样的两个三角形叫做相似三角形？我們怎样来判别两个三角形是否相似？

2. 試說明利用比例規与对角綫尺按定比放大或縮小某一綫段的原理.

3. 自己动手制作一个比例規(要能等分 50 厘米的任意綫段)，利用它把一条已知綫段分成 (1) 5 等分；(2) 7 等分.

4. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，$\angle B=\angle D$，$AB=\frac{4}{3}DE$，$DF=0.75BC$，$AC-EF=5$ cm. 求 AC 和 EF.

5. 如图. $NM \parallel AC$，$AB:NB=13:9$，如果 $DE=2$ cm，求 BE 之长.



(第 5 題)

6. 作一个任意三角形，再利用比例規作它的一个相似三角形，使它的各边縮小 6 倍.

7. 用比例規来檢驗：两个相似三角形中一切对应綫段的比，都是相等的. (注意：本題中的三角形为便于檢驗，画图时应該画得大些.)

8. 利用对角綫尺，按 1:500 的比例作出表示 25.7 米的綫段.

9. 利用对角綫尺和分割規来量地图上两个已知点間的距离. 并按地图中所注明的比例尺計算出实际距离，看結果是否相符.

10. 自己选擇一个适当的目标(树、建筑物或旗杆)，然后用一根竹竿，根据相似三角形的原理去测量它的高度.

相似多边形

§1·11 相似多边形的性质

在§1·6里，我們把对应角相等和对应边都成比例的两个多边形定义为相似多边形，接着研究了相似三角形的判定和性质，現在研究一般相似多边形的性质.

相似多边形性质定理 从两个相似多边形的一对对应顶点所作的对角綫，把这两个多边形分成个数相等，并且排列順序相同的相似三角形.

我們只对两个相似五边形进行証明：对其他边数的相似多边形可以用同样的証法.

已知 多边形 $ABCDE \backsim$ 多边形 $A'B'C'D'E'$. AC, AD 和 $A'C'$, $A'D'$ 是分别从对应顶点 A 和 A' 所作的对角綫(图1·63).

求証 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$; $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$;

$$\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'.$$

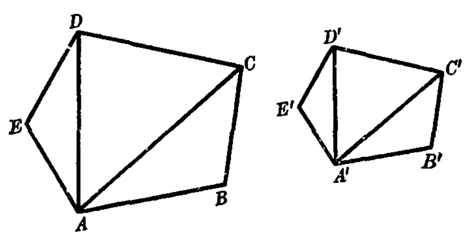


图 1·63

【証】 $\because$ 多边形 $ABCDE \backsim$ 多边形 $A'B'C'D'E'$.

$$\therefore \quad \angle EAB = \angle E'A'B', \tag{1}$$

$$\angle B = \angle B'. \tag{2}$$

$$\angle BCD = \angle B'C'D', \tag{3}$$

$$\angle CDE = \angle C'D'E', \tag{4}$$

$$\angle E=\angle E'; \tag{5}$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}. \tag{6}$$

由(2)和(6)式,依据三角形相似判定定理2,得

$$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'.$$

从而
$$\angle BCA=\angle B'C'A', \tag{7}$$

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}. \tag{8}$$

从(3)式减(7)式,得

$$\angle BCD-\angle BCA=\angle B'C'D'-\angle B'C'A',$$

即
$$\angle ACD=\angle A'C'D'. \tag{9}$$

从(8)式和(6)式,得

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'}. \tag{10}$$

由(9)式和(10)式,依据三角形相似判定定理2,得

$$\triangle ACD\backsim\triangle A'C'D',$$

从而
$$\angle CDA=\angle C'D'A', \tag{11}$$

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{CD}{C'D'}. \tag{12}$$

从(4)式减去(11)式,得

$$\angle CDE-\angle CDA=\angle C'D'E'-\angle C'D'A',$$

即
$$\angle ADE=\angle A'D'E', \tag{13}$$

从(12)式和(6)式,得

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{DE}{D'E'}. \tag{14}$$

由(13)和(14)两式,依据三角形相似判定定理2,得

$$\triangle ADE\backsim\triangle A'D'E'.$$

从图1·63看出,这些个数相等的相似三角形有相同的排列顺序.

相似多边形周长比定理 两个相似多边形周长(多边形各边的和)的比等于它們的相似比(一对对应边的比).

讀者自己証明这条定理,証明时可参閱§1·9三角形周长的比定理的証明.

习 題 1·11

1. 两个相似三角形的周长的比等于两条对应高的比.

2. 如果两个矩形的邻边的比相等,那么它們是相似矩形.

3. 相似多边形的对应对角綫(即連結两个对应角的頂点的对角綫)的比,等于对应边的比.

4. 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似,而且

$$AB:BC:CD:DA=1:\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:2;$$

如果 $A'B'C'D'$ 的周长是75米. 試求 $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ 之长.

5. 两个四边形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 相似,已知

$$AB:BC:CD:DA=20:15:9:8,\quad C'D'+D'A'=25.5\text{ cm}.$$

求四边形 $A'B'C'D'$ 各边的长.

6. 两个相似多边形的最长边各为70和28米,它們周长的和为280米,試求出它們的周长.

7 矩形的两邻边的和等于 p,在这两个邻边上分别增加 a 和 b 后,所得的新矩形和原矩形相似. 求原矩形各边的长.

8. 两个相似多边形周长的和等于145厘米,它們的对应对角綫的比为 $m:n$. 求它們的周长.

9. 已知两相似多边形一組对应边各为 p 米和 q 米,如果它們周长的差为 d 米,求出它們的周长.

10. 一个五边形的边长順次等于4, 5, 6, 7, 8厘米,另外一个和它相似的五边形的一边是9厘米. 这9厘米的边和5厘米的边是对应边,求后一个五边形的周长.

§1·12 多边形相似的判定

在§1·11里我們証明了:从一对对应頂点所作的对角綫,分两个相似多边形为个数相等,并且排列順序相同的相似三角形.

反过来讲，具有这样性质的两个多边形是否相似呢？ 下面的定理回答了这个問題。

多边形相似的判定定理 由两組个数相等，排列順序相同，对应相似的三角形所組成的两个多边形相似。

我們只对两个五边形进行証明，对其他边数的多边形可用同样的証法。

已知 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$， $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$，

$$\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'.$$

这些三角形的排列順序相同，如图 1·64 所示。

求証 多边形 $ABCDE \backsim$ 多边形 $A'B'C'D'E'$。

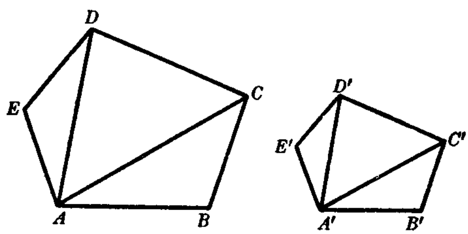


图 1·64

【証】 $\because$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}, \tag{1}$$

$$\angle BAC=\angle B'A'C', \tag{2}$$

$$\angle B=\angle B', \tag{3}$$

$$\angle BCA=\angle B'C'A'. \tag{4}$$

$\because$ $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$，

$$\therefore \quad \frac{CA}{C'A'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}, \tag{5}$$

$$\angle DAC=\angle D'A'C', \tag{6}$$

$$\angle ACD=\angle A'C'D', \tag{7}$$

$$\angle CDA=\angle C'D'A'. \tag{8}$$

$$\because \quad \triangle ADE \backsim \triangle A'D'E',$$

$$\therefore \quad \frac{DA}{D'A'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}, \tag{9}$$

$$\angle EAD=\angle E'A'D', \tag{10}$$

$$\angle ADE=\angle A'D'E', \tag{11}$$

$$\angle E \quad =\angle E'. \tag{12}$$

由(1), (5), (9)三式,得

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}. \tag{13}$$

将(2), (6), (10)三式相加,得

$$\angle BAE=\angle B'A'E'. \tag{14}$$

将(4), (7)两式相加,得

$$\angle BCD=\angle B'C'D'. \tag{15}$$

将(8), (11)两式相加,得

$$\angle CDE=\angle C'D'E'. \tag{16}$$

根据(13), (14), (3), (15), (16), (12)六式,就証明了

多边形 $ABCDE \backsim$ 多边形 $A'B'C'D'E'$.

例 1. 已知两圆外切于点 P, 过 P 的四条直綫分别交两圓于 A, A'; B, B'; C, C'; D, D' (图 1·65). 求証

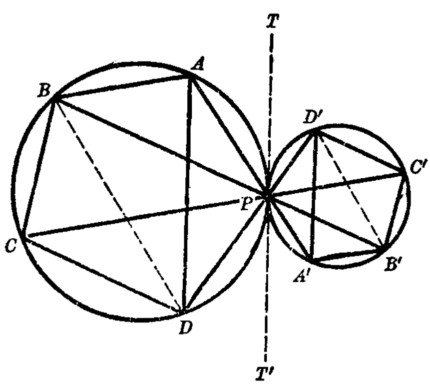


图 1·65

四边形 $ABCD \backsim$ 四边形$A'B'C'D'$.

分析 要証四边形 $ABCD \backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$, 只要先証五边形 $PABCD \backsim$ 五边形 $PA'B'C'D'$. 然后把这两个相似五边形用它們的对应对角綫分成两組个数相等,排列順序相同,对应相似的三角形,这些三角形显然是 $\triangle DPA$, $\triangle DAB$, $\triangle DBC$ 和 $\triangle D'PA'$, $\triangle D'A'B'$, $\triangle D'B'C'$. 这样四边形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 就分别由两組对应相似的 $\triangle DAB$, $\triangle DBC$ 和 $\triangle D'A'B'$, $\triangle D'B'C'$ 組成,就可断定它們是相似的.

【証】 过 P 引两圓的內公切綫 TT'. 由弦切角定理的推論得

$$\angle PBA = \angle APT, \quad \angle PB'A' = \angle A'PT'.$$

但 $$\angle APT = \angle A'PT',$$

$$\therefore \quad \angle PBA = \angle PB'A'. \tag{1}$$

$\because$ $\angle APB$ 和 $\angle A'PB'$ 为对頂角,

$$\therefore \quad \angle APB = \angle A'PB'. \tag{2}$$

由(1),(2)两式,得

$$\triangle PAB \backsim \triangle PA'B', \tag{3}$$

用同样方法可証

$$\triangle PBC \backsim \triangle PB'C', \tag{4}$$

$$\triangle PCD \backsim \triangle PC'D'. \tag{5}$$

由(3),(4),(5)三式,依据多边形相似的判定定理得

$$五边形\ PABCD \backsim 五边形\ PA'B'C'D'. \tag{6}$$

連結对角綫 BD 和 $B'D'$. 由(6),根据相似多边形性质定理知

$$\triangle PDA \backsim \triangle PD'A',$$

$$\triangle ADB \backsim \triangle A'D'B', \tag{7}$$

$$\triangle BCD \backsim \triangle B'C'D'. \tag{8}$$

由(7),(8)两式,依据多边形相似的判定定理,得

$$四边形\ ABCD \backsim 四边形\ A'B'C'D'.$$

例 2. 作一个和已知多边形 $ABCDE$ 相似的多边形,并使与 AB 对应的边等于已知綫段 a.

已知 多边形 $ABCDE$; 綫段 a (图 1·66).

求作 多边形 $A'B'C'D'E' \backsim$ 多边形 $ABCDE$, 使 $A'B'=a$.

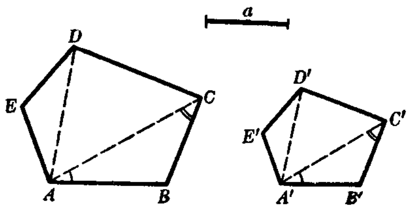


图 1·66

【作法】 連結 AC 和 AD. 作綫段 $A'B'=a$, 以 $A'B'$ 为一边, 作 $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$, 使 $A'B'$ 和 AB 对应, $\angle B'$ 和 $\angle B$ 对应.

再以 $A'C'$ 为一边作 $\triangle A'C'D' \backsim \triangle ACD$.

再以 $A'D'$ 为一边作 $\triangle A'D'E' \backsim \triangle ADE$.

多边形 $A'B'C'D'E'$ 就是求作的多边形.

【証】 显然多边形 $ABCDE$ 和多边形 $A'B'C'D'E'$ 由两組个数相等,排列顺序相同,对应相似的三角形所組成,根据多边形相似判定定理,有

$$\text{多边形 } ABCDE \backsim \text{多边形 } A'B'C'D'E',$$

并且
$$A'B'=a.$$

习 題 1·12

1. 一个平行四边形的两条邻边同另一个平行四边形的两条邻边成比例,并且它們所夹的角相等,則这两个平行四边形相似.

2. 在两个四边形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 中, 如果

$$\angle B=\angle B', \quad \angle C=\angle C', \quad \angle D=\angle D', \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{AD}{A'D'}.$$

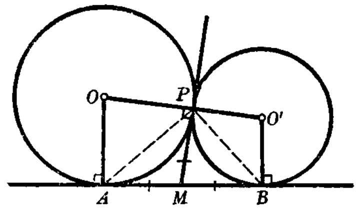
証明这两个四边形相似.

3. 在两个四边形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 中,如果

$$\angle A=\angle A', \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'},$$

証明这两个四边形相似.

4. 两圆 O 及 O' 外切于 P，外公切綫分别切两圆于 A, B，内公切綫 PM 交 AB 于 M。求証四边形 $OPMA \backsim$ 四边形 $MPO'B$。



(第 4 題)

[証：連結 OA。$\because$ AB 是外公切綫，$\therefore$ $OA \perp AB$。又 MP 是内公切綫，$\therefore$ $MP \perp OO'$。于是可知：A, O, P, M 四点共圓.

$$\therefore \quad \angle AOP = \angle PMB.$$

同理，$\quad \angle AMP = \angle PO'B$。

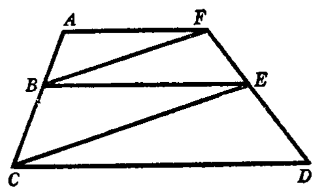
再連結 PA 和 PB，显然，$\quad OA = OP,\ O'P = O'B,\ PM = MB = MA$。

$$\therefore \quad \triangle OPA \backsim \triangle MPB \text{ 以及 } \triangle MAP \backsim \triangle O'BP.$$

根据多边形相似的判定定理，四边形 $OPMA \backsim$ 四边形 $MPO'B$.]

5. 試就两圓内切的情形，証明 §1·12 的例 1.

6. 如图. $AF \parallel BE \parallel CD$，而且 $BF \parallel CE$. 求証梯形 $ABEF \backsim$ 梯形 $BCDE$。



(第 6 題)

7. 求作一个四边形，使它和一个已知四边形相似，并且它的一条对角綫等于已知綫段 a。

8. 求作一个五边形，使和已知五边形 $ABCDE$ 相似，并且相似比等于 $\frac{1}{2}$。

*9. 求作一个梯形，使它和已知梯形相似，并且要使它的較大的底等于已知梯形較小的底.

[提示：求作的梯形和已知梯形对应边的比，就是已知的梯形两底的比，利用这个关系，就可以确定求作的梯形其他的边.]

10. 作一个多边形相似于一个已知的多边形，并使它的周长等于已知綫段 S。

§1·13 位 似 形

在本节里，我們将研究处于某种特殊相对位置的相似多边形，并且将利用前一节求作相似多边形的作图題例 2 入手．例 2 要求我們作一个多边形 $A'B'C'D'E'$，使它和已知多边形 $ABCDE$ 相似，并且 $A'B'$ 等于已知綫段 a．这个作图題也可以用下面的方法来作．

【作法】 任取一点 O，以 O 为端点作射綫 OA, OB, OC, OD, OE（图 1·67）．在射綫 OA 上作点 A'，使 $AB:a=OA:OA'$（这里 OA' 是已經确定的綫段 AB, a, OA 的第四比例項（参閱 § 1·4，作三条已知綫段的第四比例項的作图題）．

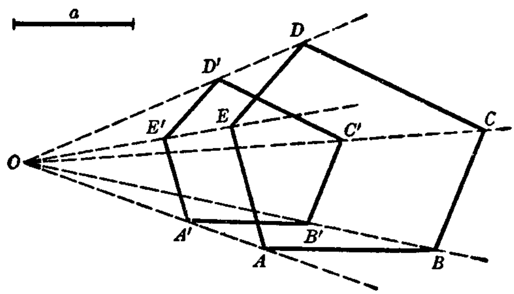


图 1·67

过 A' 引 AB 的同向平行綫 $A'B'$，$A'B'$ 交 OB 于 B'．过 B' 引 BC 的同向平行綫 $B'C'$，$B'C'$ 交 OC 于 C'．过 C' 引 CD 的同向平行綫 $C'D'$，$C'D'$ 交 OD 于 D'．过 D' 引 DE 的同向平行綫 $D'E'$，$D'E'$ 交 OE 于 E'．連結 $E'A'$，这样所得的多边形 $A'B'C'D'E'$ 就是求作的多边形．

【証】 (1) $\because\ A'B' /\!/ AB$, $\quad \therefore\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{OA}{OA'}$.

但是
$$\frac{AB}{a}=\frac{OA}{OA'}.$$

比較这两个等式即得 $A'B'=a$.

(2) $\because$ $A'B' /\!/ AB,\ B'C' /\!/ BC,\ C'D' /\!/ CD,\ D'E' /\!/ DE.$

$$\therefore\quad \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{OE'}{OE},$$

从而
$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OE'}{OE}.$$

根据平行綫截比例綫段定理 1 的逆定理，有 $E'A' /\!/ EA$. 可見多边形 $A'B'C'D'E'$ 和 $ABCDE$ 的对应边平行(有时共綫).

$\because$ $A'B'$ 和 AB 同向平行，$B'C'$ 和 BC 同向平行，

$$\therefore\quad \angle A'B'C'=\angle ABC.$$

用同法可証两个多边形的对应角都相等，即

$$\angle B'C'D'=\angle BCD,\quad \angle C'D'E'=\angle CDE,$$
$$\angle D'E'A'=\angle DEA,\quad \angle E'A'B'=\angle EAB.$$

$$\because\quad A'B' /\!/ AB,\quad B'C' /\!/ BC.$$

$$\therefore\quad \frac{A'B'}{AB}=\frac{OB'}{OB}=\frac{B'C'}{BC},$$

从而
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}.$$

同理，得
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'E'}{DE}=\frac{E'A'}{EA}.$$

$\therefore$ 多边形 $A'B'C'D'E' \backsim$ 多边形 $ABCDE$.

由上面的方法所作的多边形 $A'B'C'D'E'$，不但和已知多边形 $ABCDE$ 相似，并且它們的对应边互相同向平行(有时共綫)，对应頂点的連綫相交于同一点，这一点把連結对应頂点的綫段(象 $A'A$)按照它們的相似比 $\left(K=\frac{A'B'}{AB}\right)$ 外分 $\left(\frac{A'O}{OA}=K\right)$.

这个作图題还有下面的作法.

【作法】 任取一点 O，以 O 为端点引射綫 OA, OB, OC, OD, OE(图 1·68). 在射綫 OA 的反向延长綫上作点 A''，使

$$AB:a=OA:OA''$$

(这里 OA'' 是已經确定的綫段 AB, a, OA 的第四比例項).

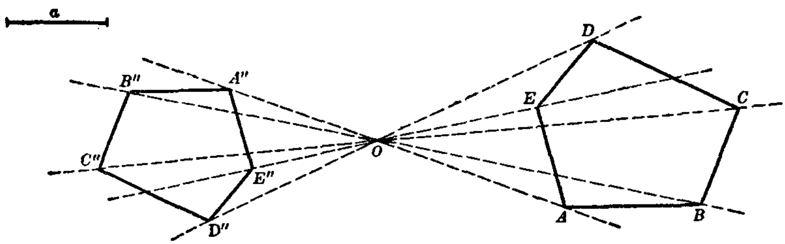


图 1·68

过 A'' 引 AB 的反向平行綫 $A''B''$, $A''B''$ 交 OB 的反向延长綫于 B''. 过 B'' 引 BC 的反向平行綫 $B''C''$, $B''C''$ 交 OC 的反向延长綫于 C''. 过 C'' 引 CD 的反向平行綫 $C''D''$, $C''D''$ 交 OD 的反向延长綫于 D''. 过 D'' 引 DE 的反向平行綫 $D''E''$, $D''E''$ 交 OE 的反向延长綫于 E''. 連結 $E''A''$. 这样所得的多边形 $A''B''C''D''E''$ 相似于多边形 $ABCDE$.

請讀者仿照前面的証明方法,自己証明.

由上面的方法所作的多边形 $A''B''C''D''E''$ 不但和已知多边形 $ABCDE$ 相似, 并且它們的对应边互相反向平行 (有时共綫), 对应頂点的連綫相交于同一点,这一点把連結对应頂点的綫段(象 $A''A$)按照它們的相似比 $\left(K=\dfrac{A''B''}{AB}\right)$ 內分 $\left(\dfrac{A''O}{OA}=K\right)$.

如果两个相似多边形的对应边互相平行(有时共綫), 对应頂点的連綫相交于一点, 那么这两个多边形叫做**位似多边形**. 对应頂点的連綫的交点叫做**位似中心**.

如果位似中心在連結对应頂点的綫段的延长綫上, 这个位似中心叫做**外位似中心**.

如果位似中心在連結对应頂点的綫段上, 这个位似中心叫做

内位似中心.

图 1·67 和图 1·68 里,多边形 $ABCDE$ 和多边形 $A'B'C'D'E'$ 以及多边形 $A''B''C''D''E''$ 都是位似多边形, 它們的位似中心都是点 O. 在图 1·67 里是外位似中心,图 1·68 里是內位似中心.

位似形的位似中心可以取任何位置. 在图 1·69 中,位似中心 O 是两个位似多边形內部的点; 在图 1·70 中, 位似中心 O 是两个位似多边形边上的一点; 在图 1·71 中, 位似中心 O 正好是位似多边形的一个頂点.

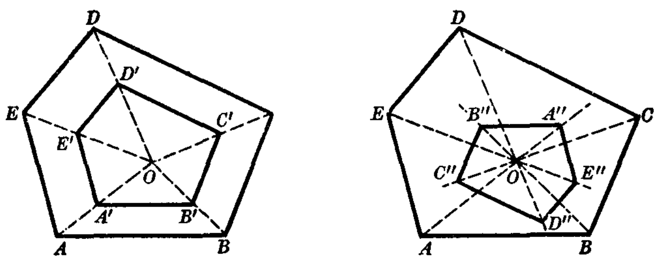


图 1·69

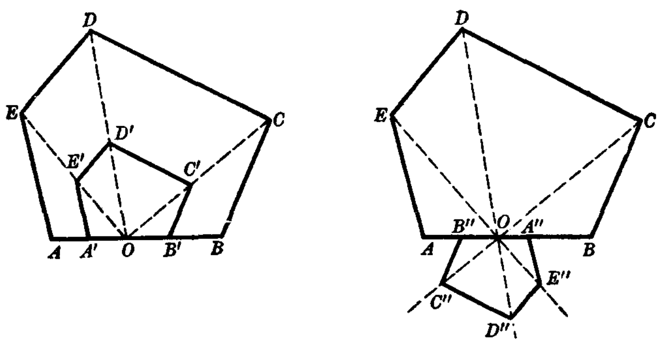


图 1·70

从前面的討論可以知道, 位似形是处于特殊相对位置的相似形, 所以位似形必然相似;相似形却未必位似. 特别要注意,对应

边互相平行，对应顶点的連綫都过同一点的两个多边形未必是位似形(图 1·72).

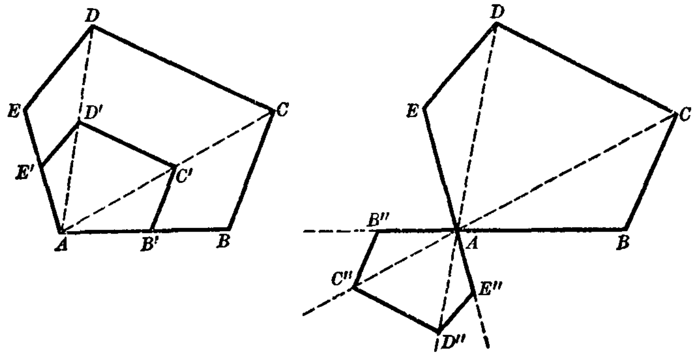


图 1·71

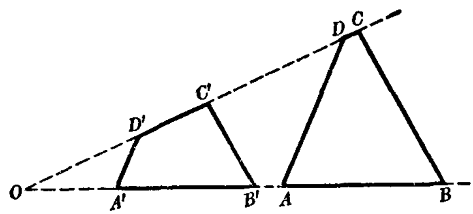


图 1·72

关于位似形的知識，在实际測量中有广泛的应用. 例如：平地上有一片多边形形狀的地段 $ABCDE$. 如果要測繪这片地段的图形，我們可以在地段中找一个点 O, 从 O 测定地面綫段 OA, OB, OC, OD, OE 的方向和长度，然后在紙上取一点 O', 从 O' 画出对应的方向綫 $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$, $O'D'$, $O'E'$, 并且使

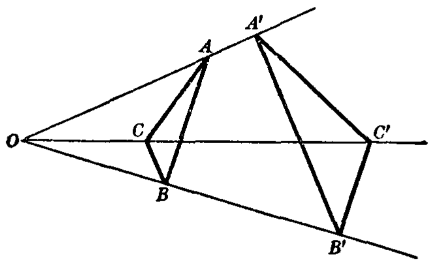
$$\frac{O'A'}{OA}=\frac{O'B'}{OB}=\frac{O'C'}{OC}=\frac{O'D'}{OD}=\frac{O'E'}{OE}=K$$

$\left(\text{这里 } K \text{ 可以取适当的值例如 } \frac{1}{500}\right)$. 这样就利用了画位似形的方法在紙上画出了这片地段的图形.

习 题 1·13

1. 举例說明，两个多边形如果只是各边对应平行，并且对应頂点的連綫相交于一点，它們不一定是位似形.

2. 已知 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$（如图），它們对应頂点的連綫 AA', BB' 与 CC' 相交于一点 O. 这两个三角形是不是位似三角形?



（第 2 题）

3. 試作出一个四边形，使它和一个已知的四边形是位似的：

(1) 取相似比等于 2，位似中心在形內；

(2) 取相似比等于 $\frac{1}{3}$，位似中心在边上.

4. 在下列条件中，三角形的形状和大小是否完全确定? 否則应該补充什么条件后才能使它們完全确定下来：

(1) 已知三角形中的任意两个內角；

(2) 已知三角形中的一个角及夹这角的两边的比；

(3) 已知一个三角形的三条边的比.

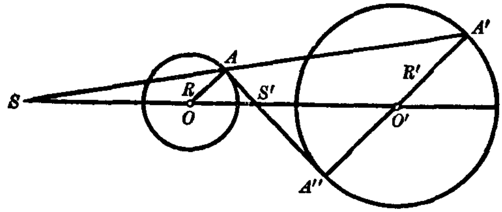
5. 已知綫段为 AB，取一点 S 为位似中心，怎样按已知的相似比 k，作出它的位似图形?

6. 如果两条不相等的綫段 $AB \parallel A'B'$，能不能把它們看作是位似的图形? 怎样确定它們的位似中心和相似比?

7. 証明以三角形三边中点作頂点的三角形与原三角形位似，并且两三角形的公共重心是它們的位似中心.

8. 求作一个四边形，使和已知的四边形 $ABCD$ 相似，并且使和 AB 的对应边等于已知綫段 a ($a > AB$).

*9. 証明任意二圓都有內、外位似中心，并且它們按定比內分与外分連結两圓圓心的綫段（唯同心圓例外）.



(第 9 题)

[略証：假設圓 O 的半徑为 R，圓 O' 的半徑为 R'，并且它們是外离的.

作出二圓的同向平行半徑 OA 与 $O'A'$. 連結 AA'，交連心綫 OO' 于 S. 这样就得到 $\frac{SA}{SA'}=\frac{SO}{SO'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{R}{R'}$.

既然 A 与 A' 是任意作的二条平行半徑的端点，必有 $\frac{SO}{SO'}=\frac{R}{R'}$. 可見 S 是一个定点，它是二圓所有同向平行的半徑的对应端点連綫与連心綫的交点. 因而 S 成为二圓的外位似中心，A 与 A' 是一双对应点.

如果在圓 O' 中，延长 $A'O'$ 至圓上一点 A''，連結 AA'' 交 OO' 于 S'. 同理，S' 就是二圓的內位似中心，并且 $\frac{S'O}{S'O'}=\frac{R}{R'}$. 这时 A 与 A'' 是一双对应点，它們是反向平行的二条半徑的端点. 二圓其他情形的詳細証明，留給讀者去作.]

10. 在圓 O 中，AB 为直徑，C 为 AB 上的一点，$AC:CB=m:n$，

(1) 从点 A 作圓 O 的任意一条弦 AD'. 在 AD' 取点 P'，使 $AP':P'D'=m:n$，求証 P' 在以 AC 为直徑的圓上；

(2) 在以 AC 为直徑的圓上任取一点 P，延长 AP 交圓 O 于 D. 求証 $AP:PD=m:n$；

(3) 过圓 O 的点 A 引弦，求分弦成 $m:n$ 的点的軌迹.

§1·14 应用作位似形解作图题

某些作图题一方面規定了求作图形的形状，另一方面又規定了求作图形的位置或大小. 以作图题："求作一个正方形，使它內接于一个已知半圓(即正方形的一边在半圓的直徑上，正方形的两个頂点在半圓上)"为例，在形状上規定求作的图形是一个正方形，在位置上規定求作的图形內接于已知半圓. 又以作图题："求作三

角形 ABC，使它和已知三角形 $A'B'C'$ 相似，并且在 BC 边上的中綫等于已知綫段 m" 为例，这里在形状上规定求作的三角形和已知三角形相似，在大小上又规定在 BC 边上的中綫要等于已知綫段 m.

解这一类作图题的一般方法是：先作一个和求作图形相似的图形 F，然后选擇适当的位似中心和相似比，作出图形 F 的位似图形 F'，使 F' 的位置或大小符合作图題的要求，那末图形 F' 就是求作的图形.

例1. 作三角形 ABC 的內接正方形，使正方形的一边在 BC 上，两个頂点分别在 AB, AC 上.

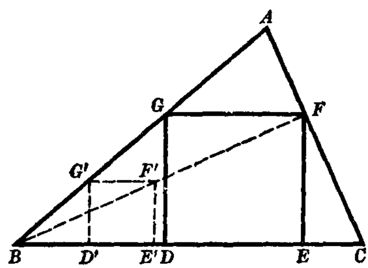


图 1·73

已知 $\triangle ABC$ (图 1·73).

求作 正方形 $DEFG$，使 DE 在 BC 上，頂点 G 和 F 分别在 AB 和 AC 上.

分析 这里，在形状上要求所作的图形是一个正方形，在位置上要求所作的正方形內接在已知三角形 ABC 中. 直接作出同时符合这两个要求的图形比較困难，但是可以作出一个正方形，象 $D'E'F'G'$，使它只符合位置要求的一部分. 即一条边 $D'E'$ 在 BC 上，一个頂点 G' 在 AB 上. 然后选 B 为位似中心，作正方形 $D'E'F'G'$ 的位似形 $DEFG$. 这里按照作位似形的方法，F' 的对应頂点 F 是在射綫 BF' 上；按照作图題的要求，頂点 F 又必須在 AC 上. 因此 BF' 和 AC 的交点 F 应当为求作正方形的一个頂点.

【作法】 在 AB 上取任意点 G'. 作 $G'D' \perp BC$，D' 为垂足. 在 $D'C$ 上取点 E'，使 $D'E' = G'D'$. 以 $G'D'$, $D'E'$ 为邻边作正方形 $D'E'F'G'$.

連結 BF'，射綫 BF' 交 AC 于 F. 作 $GF \parallel G'F'$，GF 交 AB 于 G. 作 $GD \parallel G'D'$，GD 交 BC 于 D. 作 $FE \parallel F'E'$，FE 交 BC 于 E. 則 $DEFG$ 为求作的正方形.

【証】 由作法容易断定，四边形 $DEFG$ 的四个角都是直角，即 $DEFG$ 是矩形.

$$\because\quad GF \parallel G'F', \qquad \therefore\quad \frac{GF}{G'F'}=\frac{BG}{BG'}.$$

$$\because\quad GD \parallel G'D', \qquad \therefore\quad \frac{GD}{G'D'}=\frac{BG}{BG'}.$$

$$\therefore\quad \frac{GF}{G'F'}=\frac{GD}{G'D'},$$

但 $\qquad G'F'=G'D', \qquad \therefore\quad GF=GD.$

$\therefore$ $DEFG$ 为正方形. 并且 $DEFG$ 的一边在 BC 上，顶点 G 和 F 又分别在 AB 和 AC 上. 因此 $DEFG$ 为所求作的正方形.

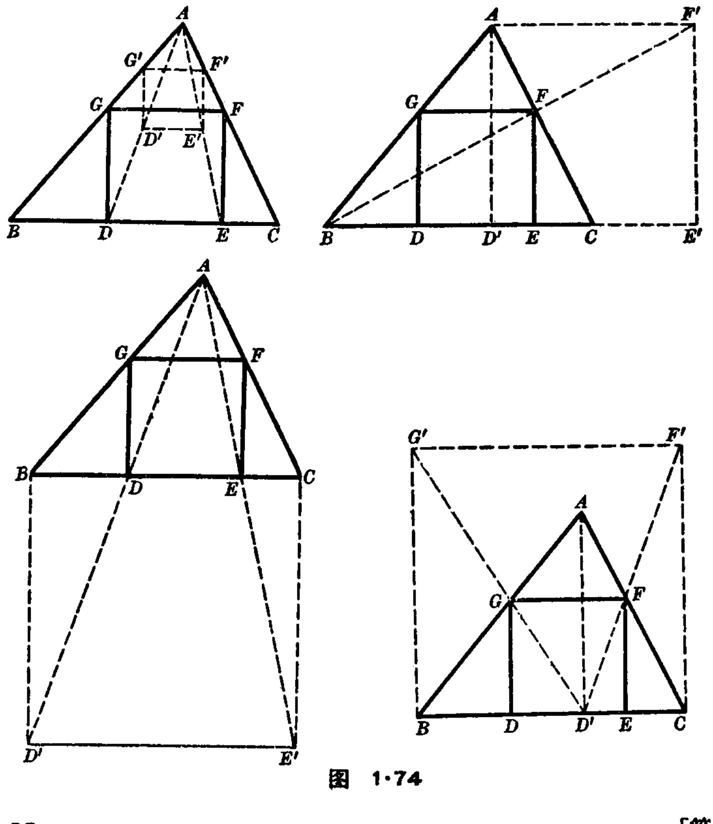


图 1·74

注意 在这个作图题里，作正方形 $D'E'F'G'$ 的位似形时，我們取点 B 为位似中心，两个位似形的相似比显然等于 $\frac{BF}{BF'}$.

这个作图题的解法很多，請讀者参閱图 1·74 自己选擇一个方法，然后写出作法和証明. 本題当 $\angle B$ 或 $\angle C$ 为鈍角时无解.

例 2. 作三角形 ABC，使 $BC:CA:AB=4:5:7$，并且在边 BC 上的中綫等于 4 厘米.

分析 这里，条件"$BC:CA:AB=4:5:7$"規定了求作三角形的形状，条件"在边 BC 上的中綫等于 4 厘米"規定了求作三角形的大小. 可以先考慮規定形状的条件，先作任意大小的一个三角形 $A'B'C'$，只要使 $B'C':C'A':A'B'=4:5:7$. 然后作三角形 $A'B'C'$ 的位似三角形 ABC，使 BC 边上的中綫等于 4 厘米(图 1·75).

【作法】 作任意大小的三角形 $AB'C'$，使

$$B'C':C'A:AB'=4:5:7.$$

作 $B'C'$ 边上的中綫 AM'，在 AM' 上(或 AM' 的延长綫上)取点 M，使 AM 等于 4 厘米. 过 M 引 $BC \parallel B'C'$，BC 分别交 AB' 和 AC'(或它們的延长綫)于 B 和 C. 三角形 ABC 就是求作的.

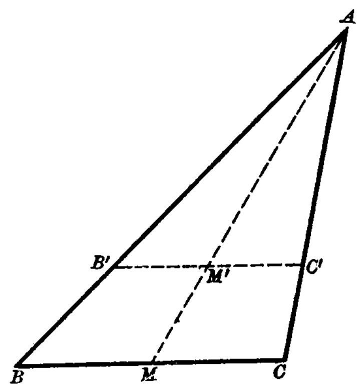


图 1·75

【証】 $\because \quad BC \parallel B'C'$， $\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$，

从而
$$\frac{AB}{AB'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A}=K,$$

即 $AB=K\cdot AB'$， $BC=K\cdot B'C'$， $CA=K\cdot C'A$.

$$\begin{aligned}\therefore \quad BC:CA:AB&=K\cdot B'C':K\cdot C'A:K\cdot AB'\\&=B'C':C'A:AB'\\&=4:5:7.\end{aligned}$$

$$\because \quad BC \parallel B'C',$$

$$\therefore \quad \frac{BM}{B'M'}=\frac{AM}{AM'}=\frac{MC}{M'C'},$$

从而
$$\frac{BM}{B'M'}=\frac{MC}{M'C'}.$$

但 $\qquad B'M'=M'C', \qquad \therefore \quad BM=MC,$

即証明 AM 为 BC 边上的中綫. 依据作图 $AM=4$ cm.

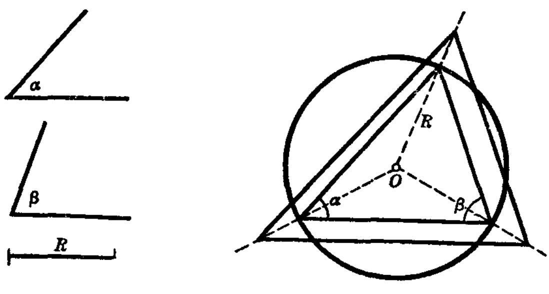
注意 在这个作图里，三角形 $AB'C'$ 和 ABC 显然是位似的，A 是位似中心，它們的相似比等于 $\frac{AM}{AM'}$.

习 题 1·14

1. 把一个已知五边形按相似比 $k=\frac{2}{3}$ 作出它的位似形.

2. 已知三角形三边的比是 $a:b:c=7:3:5$, a 边上的中綫为定长 m, 求作此三角形.

3. 已知两个角 α 和 β 以及外接圓半徑 R, 求作三角形.



(第 3 題)

4. 已知两条边的比，一个角和一条对角綫，求作一个平行四边形.

5. 已知一个角和內切圓的半徑，求作菱形.

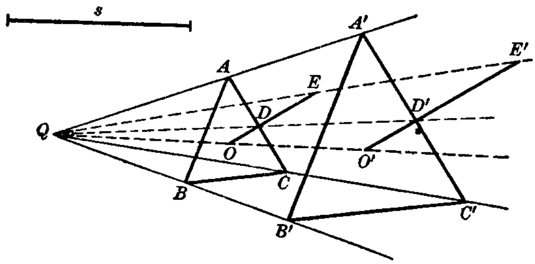
6. 已知对角綫与一边之差，求作正方形.

7. 已知一个銳角 α, 以及两条对角綫之差 d, 求作菱形.

8. 在一个已知三角形 ABC 內，求作一个等腰直角三角形，使它的三个顶点分别在三条边上，并且使一条直角边平行于已知三角形的一边 BC.

9. 在已知半圆内求作一个内接正方形，使它的一边在半圓的直徑上，其他两个頂点在半圓上.

*10. 求作一个三角形与一已知三角形相似，且它的内切圓与外接圓半徑的和为定长.



(第10題)

[已知：綫段 s，$\triangle ABC$.

求作：$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$，且使 $R'+r'=s$；这里 R' 和 r' 分别是 $\triangle A'B'C'$ 的外接圓半徑和内切圓半徑.

作法：把 $\triangle ABC$ 的内切圓半徑 OD 延长至 E(如图)，使 OE 等于 $\triangle ABC$ 内切圓半徑与外接圓半徑之和. 再在任意位置作 $O'E' \parallel OE$，而且 $O'E'=s$. 連接 OO' 与 EE'，設它們相交于点 Q. 連接 QA, QB, QC，再連接并延长 QD，交 $O'E'$ 于 D'. 过 D' 作 $C'A' \parallel CA$ 分别与 QC, QA 交于 C' 和 A'. 再从 A' 作 $A'B' \parallel AB$ 交 QB 于 B'，連接 $B'C'$，$\triangle A'B'C'$ 就是求作的三角形.

證：由作法，$A'B' \parallel AB$，$C'A' \parallel CA$，可知 $\angle B'A'C' = \angle BAC$. 在 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 中，又有 $\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{QA'}{QA}=\dfrac{A'B'}{AB}$，这就滿足了三角形相似的判定定理 2，

$$\therefore \quad \triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC.$$

已知 OD 与 DE 是 $\triangle ABC$ 的内切圓半徑与外接圓半徑，根据 §1·9 中关于相似三角形对应綫段成比例的結論（参閱 §1·9 的例 1），OD 与 DE 应与 $\triangle A'B'C'$ 的内切圓半徑 r' 和外接圓半徑 R' 成比例；

$$\therefore \quad \frac{r'}{OD}=\frac{A'C'}{AC}, \quad \frac{R'}{DE}=\frac{A'C'}{AC}.$$

又从图中的 $O'E' \parallel OE$，$D'E' \parallel DE$，可見

$$\frac{O'D'}{OD}=\frac{QD'}{QD}=\frac{D'E'}{DE}, \quad \text{以及} \quad \frac{QD'}{QD}=\frac{A'D'}{AD}=\frac{QA'}{QA}=\frac{A'C'}{AC}.$$

由此得到 $$\frac{O'D'}{OD}=\frac{A'C'}{AC}, \quad \frac{D'E'}{DE}=\frac{A'C'}{AC}.$$

$$\therefore\quad O'D'=r',\quad D'E'=R'.$$

而且 $$R'+r'=D'E'+O'D'=O'E'=s,$$

$$\therefore\quad \triangle A'B'C' \text{ 符合条件.}]$$

§1·15 放 縮 尺

放縮尺是画出巳知图形的位似形的工具，它是由 AD, AB, CE, CS 四条直尺組成的. 在 A, B, C, D 处，用螺絲釘把这些尺連接起来，构成一个平行四边形 $ABCD$，但是每一条尺都可以繞着連接点自由地轉动(图 1·76).

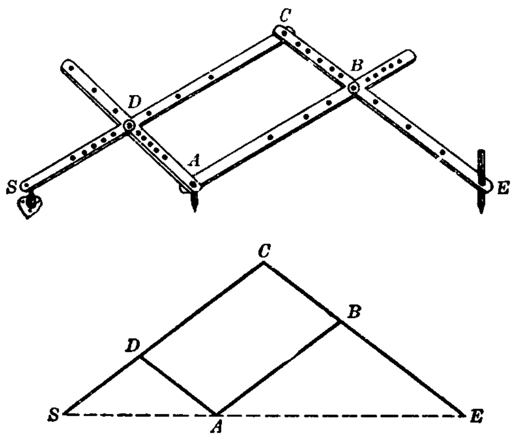


图 1·76

在应用时，尺 CS 的端点 S 被固定在图画板上，但是尺 CS 仍旧可以繞 S 自由地轉动. 在点 A 装上一个描巳知图形用的尖針. 在尺 CE 的端点 E 插上一枝鉛笔，巳知图形的位似形就由这枝笔画出.

直尺 $CE=CS$，因此三角形 CSE 是等腰的，从而

$$\angle CSE=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle C). \tag{1}$$

直尺 $DS=DA$，因此三角形 DSA 是等腰的，从而

$$\angle DSA=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle SDA).$$

但是 $$\because\quad DA\parallel CB,\qquad \therefore\quad \angle SDA=\angle C.$$

因此

$$\angle DSA=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle C). \tag{2}$$

由(1)，(2)两式，得 $\angle CSE=\angle DSA$。这說明連結 S, E 的綫段和連結 S, A 的綫段相重，因此 S, A, E 三点总在一直綫上.

同时，$\because DA /\!/ CE$，$\therefore \dfrac{ES}{SA}=\dfrac{CS}{SD}$。但是点 D 是尺 CS 上的固定点，因此 $\dfrac{CS}{SD}$为定值. 所以不管放縮尺的位置如何，我們总有 S, A, E 三点在一直綫上，而且点 S 把綫段 EA，按定比 $\dfrac{CS}{SD}$ 外分.

在图 1·77 里，当放縮尺的尖針，順着已知四边形 $A_1A_2A_3A_4$，从 A_1 描到 A_2 时，放縮尺的位置，从 SE_1C_1 改变为 SE_2C_2，鉛笔也对应地画出綫段 E_1E_2。

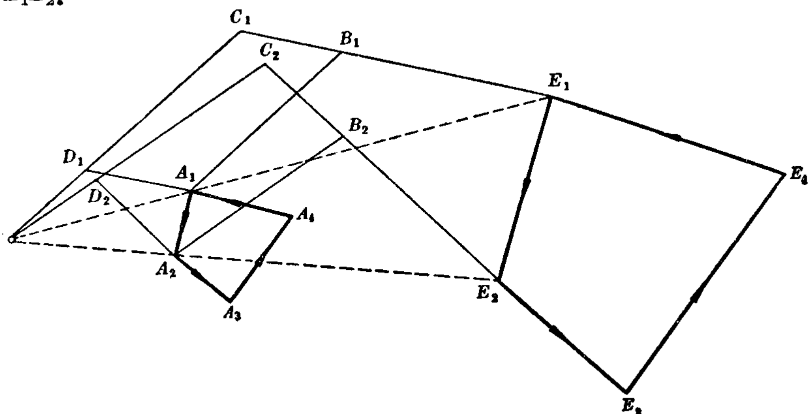


图 1·77

当尖針連續地描出已知四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 时，鉛笔就对应地画出四边形 $E_1E_2E_3E_4$。連結这两个四边形的对应頂点的綫段，延长后都通过点 S，而且被 S 按定比 $\dfrac{CS}{SD}$ 外分. 因此这两个四边形是位似形，S 是它們的外位似中心，它們的相似比等于 $\dfrac{SC}{SD}$。

在图 1·76 里是 $CS>SD$，$\therefore \dfrac{CS}{SD}>1$。因此我們得到一个放大的位似形.

如果在 A 插上一枝鉛笔，在 E 插上一个尖針. 当尖針連續地描出已知四边形 $E_1E_2E_3E_4$ 时，鉛笔就对应地画出四边形 $A_1A_2A_3A_4$。这两个四边形当然是位似形，S 仍旧是位似中心，但是它們的相似比等于 $\dfrac{DS}{SC}$。現在 $DS<SC$，$\therefore \dfrac{DS}{SC}<1$。因此我們得到一个縮小的位似形.

利用放縮尺也可放縮曲綫形.

习 题 1·15

1. 相似多边形的相似比 k，是否只能是整数或分数？为什么？在相似多边形的作图中，当 $k>1$，$k=1$ 或 $k<1$ 时，所得到的图形較原图形的对应边大小如何？放縮尺是不是就根据这个原理設計出来的？

2. 怎样判定两个多边形是相似的？它有哪些性质？試与两个成为位似的多边形作一对比.

3. 怎样区别位似形的内位似中心与外位似中心？对于多边形来說，位似中心可能在哪些位置上？

4. 試用木条制作一个放縮尺，并說明它和比例規与对角綫尺的异同.

本 章 提 要

1. **概念** 綫段的量数，綫段的长度，两条綫段的比，成比例綫段；相似三角形，相似多边形；位似多边形.

2. **图形的性质** 比例綫段定理，平行綫截得比例綫段定理，三角形的内外角平分綫定理，相似三角形中关于对应綫段比的定理，相似多边形性质定理，位似多边形的性质.

3. **图形的判定** 四綫段成比例，两直綫平行；三角形、直角三角形、四边形及多边形的相似.

4. **作图的方法** 三綫段的第四比例項，一綫段的定比分点，用相似或位似法解关于三角形与多边形的作图题.

复 习 题 一

1. 用长度单位去量一条綫段，結果有几种可能情形发生？試举例說明.

2. “綫段”、“綫段的量数”和“綫段的长度”的概念是否相同？为什么？

3. 假如綫段 $a=5\sqrt{2}b$，求綫段 a 与 b 的比？如果我們取 $\sqrt{2}b$ 为长度单位时，結果又怎样？

4. 已知綫段 d 是綫段 a, b, c 的第四比例項. 証明綫段 a 和綫段 d 的比例中項等于綫段 b 和 c 的比例中項.

5. 已知 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$; 求証 $\frac{ma+nd}{ma-nd}=\frac{ma^3+nb^3}{ma^3-nb^3}$.

[提示：从形式上看来，要証明的結果与合比、分比定理有关系，因此看能不能先証明 $\frac{ma}{nd}=\frac{ma^3}{nb^3}$?]

6. 判定三角形相似的条件主要有几种？判定直角三角形呢？后者的条件中哪些是由前者直接推导出来的？把这两类的定理和三角形全等的判定定理作一对比.

7. 在梯形的两腰之間有一条和底边平行的綫段，求証这条綫段在一腰和一对角綫之間的部分，等于另一腰和另一对角綫之間的部分.

8. 把梯形的一腰分成三等分，从各分点引平行于底的直綫. 已知梯形的两底分别为 20 厘米和 50 厘米，求各平行綫夹在梯形两腰間的綫段的长.

9. 設梯形 $ABCD$ 的两底中点分别为 E 和 F，两对角綫的交点为 G；求証：E、F、G 三点在同一条直綫上.

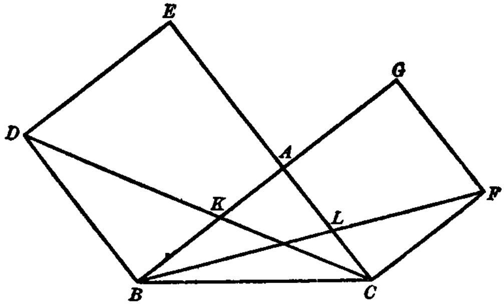
10. 設 $\triangle ABC$ 的垂心为 H；D, E, F 是三条高的垂足，連結 EF 交 AD 于 G. 証明綫段 GD 被 H, A 按同比內分与外分.

[提示：設法利用 $\triangle DEF$ 的內角与外角平分綫的性质.]

11. 如果正方形 $DEFG$ 的頂点 D 和 E 在 $\triangle ABC$ 的 BC 边上，頂点 G 在 AB 边上，頂点 F 在 AC 边上. 已知 $\triangle ABC$ 中，BC 的长是 12 厘米，高 AH 的长是 6 厘米. 求正方形的边长.

12. 过分梯形一腰为 $m:n$ 的分点，引平行于底的直綫. 已知梯形的两底分别等于 a 和 b，試計算出这条平行綫夹在梯形两腰間的綫段的长.

13. 已知三角形各边的长为 a, b, c；a 边最长，求最大角的平分綫分对边所得綫段的长.

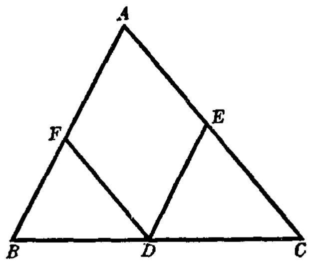


(第 14 題)

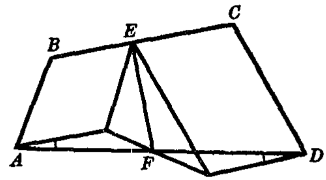
*14. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$. 在二边AB及AC上向外作正方形$ABDE$及$ACFG$，而且DC交AB于K，BF交AC于L。求証$AK=AL$。

[提示：利用比例，分别用AB，AC来表示AK与AL.]

15. 已知菱形內接于$\triangle ABC$，D，E和F都是菱形在边BC，AC和AB上的頂点，并且$AB=20$ cm，$AC=25$ cm. 求这菱形的边长.



(第 15 題)



(第 20 題)

16. 过菱形一頂点，在形外引一直綫和菱形其他两边的延长綫相交，所截两延长綫的长各为p及q. 求这菱形的边长.

17. 两圓外切，过切点引一割綫. 这割綫在两圓內部的綫段的比为13:5，如果两圓圓心距为36厘米. 求出这两圓的半徑.

18. 圓的半徑为25厘米，弦的一端和过另一端的切綫距离为30厘米，求这弦的长.

19. 两圓外切，它們的半徑分别为r和R，这两圓的外公切綫和連心綫的交点为M. 求M到大圓圓心的距离.

*20. 把一四边形的相对的两边各分成两段，使被分成的比等于其他两边的比. 証明連結这两分点的直綫与其他两边的延长綫成等角.

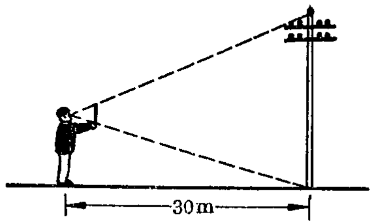
[提示：設四边形相对的两边上的分点为E与F，把其他二边平移到E或F，再利用角平分綫性質的逆定理.]

21. 在$\triangle ABC$內，M为BC的中点，$\angle AMB$的平分綫交AB于E，$\angle AMC$的平分綫交AC于D，証明$\triangle AED \backsim \triangle ABC$.

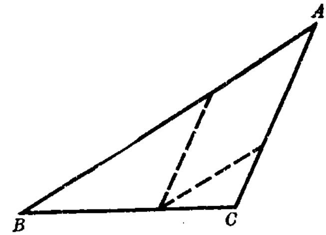
22. 有人拿着一支每厘米刻有分划的小尺，在距电綫杆30米的地方，把手臂向前伸直，看到尺上12个分划恰好遮住电綫杆。已知臂长为60厘米，求电綫杆的高(图附后).

23. 在已知的三角形內作一个內接菱形(如图所示).

[提示：可先作$\angle A$的平分綫，确定菱形在BC边上的一个頂点.]



（第 22 题）



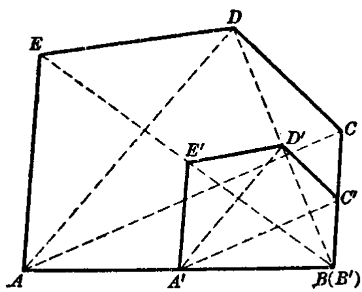
（第 23 题）

24．已知定角 α，綫段 a，定比 $m:n$．求作 $\triangle ABC$，使 $\angle A=\alpha$，$BC=a$，$BC:BA=m:n$．

25．已知 C 为 $\angle AOB$ 內部一定点，在边 OB 上求一点 M，使 M 到 OA 的距离等于 M 和 C 的距离．

26．已知綫段 a，b 和 c，求作綫段 x，使 $\frac{1}{2}x=\frac{ab}{b+c}$．

27．已知五边形 $ABCDE$，相似比 $k\left(設为\ \frac{1}{2}\right)$，求作与已知五边形相似的五边形．如果我們采用下述作法，你能否証明这个作法是正确的？从此你还可以得出类似的作图方法嗎？



（第 27 题）

作法： 在已知五边形的一边 AB 上取一点 A'，使 $\frac{A'B}{AB}=k$．然后过 A' 分别作 AE，AD 和 AC 的平行綫各交 BE，BD 和 BC 于 E'，D' 以及 C'，再連結 $E'D'$ 和 $D'C'$，所得到的五边形 $A'B'C'D'E'$ 就和已知的五边形相似，且相似比等于定比 k．

28．在 $\triangle ABC$ 內求作一个半圓与 BC 相切，并且半圓的直徑和 BC 平

行，它的两端分别在 AB 和 AC 上. 如果 $\triangle ABC$ 中，$BC=a$，高 $AD=h$，求半圓的半徑.

29. 在已知半圓內作一个內接矩形，使矩形两边之比为 $m:n$.

30. 以一已知綫段为周长作一个多边形，并使它相似于一个已知多边形.

31. 已知頂角、底边上中綫的长以及其他两边之比，求作三角形.

32. 已知两个角和內切圓半徑，求作三角形.

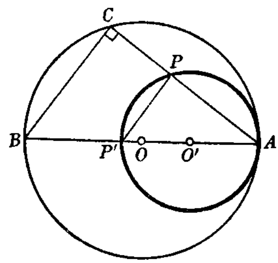
33. 已知底边和另一边上中綫的长，求作一个定圓的內接三角形.

[提示：在定圓 O 中作弦 AB 等于已知底边的长，然后以 OB 为直徑作一圓，再以 A 为圓心，已知中綫为半徑作圓交前一圓于 D，延长 BD 交圓 O 于 C；$\triangle ABC$ 即为所求.]

*34. 已知一条边的长以及三条高的比，求作三角形.

[提示：可参閱 §1·8 例 1，并利用习题 1·8 第 2 題.]

35. A 为定圓 O 上的一个定点，点 P 分过点 A 所作的圓 O 的弦成定比 $m:n$，求点 P 的軌迹.



(第 35 題)

[解：过点 A 作圓 O 的直徑 AB，假定点 P' 分 AB 成定比 $m:n$，那么 P' 就是所求軌迹上的一个定点. 再作任意一条弦 AC，假定点 P 分 AC 成定比 $m:n$，連接 BC，PP'，

$$\because \quad \frac{AP'}{P'B}=\frac{AP}{PC}=\frac{m}{n},$$

$\therefore \quad P'P \parallel BC$. 由于 $\angle ACB=d$，$\therefore \quad \angle APP'=d$，

因此，点 P 的軌迹是以 AP' 作直徑的一个圓.]

36. 証明把連結一个点和已知圓上各点的綫段分成定比的点的軌迹是一个圓.

第二章 有关三角形和圓的綫段間的度量关系

在第一章的开始，我們就指出了度量綫段的目的在于得到一个量数．現在設想用同一长度单位去量某一个图形里的某些綫段，如果在所得的量数之間存在着一种关系，并且这种关系可以用这些量数的等式来表达，那末这种关系叫这个图形的**度量关系**．表达图形的度量关系的等式叫**度量关系式**．

图形的度量关系式有极重要的意义，一方面它具体地表达了图形的度量性质；另一方面，我們知道了一个图形的某几条綫段的量数，其他綫段的量数可以通过它們的度量关系式計算而得．

在后面的許多等式里，我們将遇到綫段的和（象 $AB+CD$），綫段的差（象 $AB-CD$），綫段的积（象 $AB\cdot CD$），綫段的商$\left(象\ \dfrac{AB}{CD}\right)$，綫段的乘幂（象 AB^2），必須分别理解为对应于这些綫段的量数的和，差，积，商，幂．

在这一章里，首先研究有关三角形的綫段間的度量关系．这里所說的和三角形有关的綫段，主要指三角形的边，高，中綫，……等．接着研究有关圓的綫段間的度量关系．这里的和圓有关的綫段主要是指圓的弦，切綫，割綫，……等．最后介紹如何应用度量关系式解作图題的方法——代数作图法．

和三角形有关的綫段間的度量关系

§2·1 直角三角形中成比例的綫段

在推求直角三角形中哪些綫段成比例时，我們要用到綫段在

一条直綫上的射影的概念.

从一点向一直綫所引垂綫的垂足，叫做这个点在这条直綫上的**正射影**. 在图 2·1 中，$AA'\perp MN$，垂足 A' 是点 A 在直綫 MN 的正射影. 如果点 A 是 MN 上的点，那末 A 在 MN 上的正射影就是它本身.

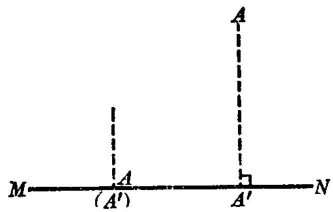


图 2·1

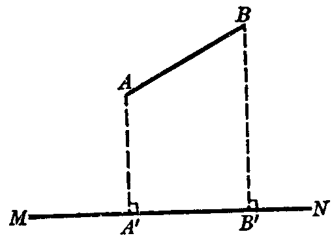


图 2·2

一条綫段在直綫上的正射影，就是綫段的两个端点在这条直綫上的正射影間的綫段. 在图 2·2 中，綫段 AB 的两个端点 A 和 B 在直綫 MN 上的正射影分别为 A' 和 B'，綫段 $A'B'$ 是綫段 AB 在直綫 MN 上的正射影.

关于正射影，我們可以想象为垂直射向 MN 的光綫，把一个点或者一条綫段投射在直綫 MN 上的阴影.

当 $AB\parallel MN$ 时，$AB=A'B'$. 当 AB 既不平行于 MN，又不垂直于 MN 时，$AB>A'B'$. 当 $AB\perp MN$ 时，$A'B'=0$(图 2·3).

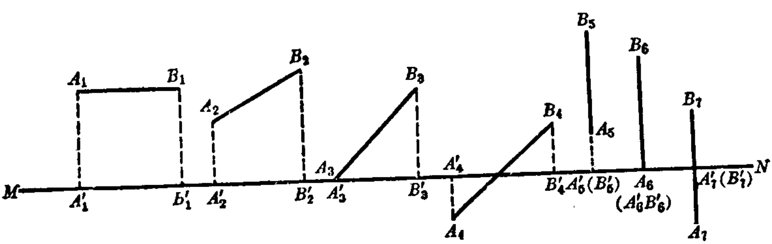


图 2·3

总的来讲，一个点在一条直綫上的正射影仍旧是一个点；一条綫段在一条直綫上的正射影仍旧是一条綫段（除非綫段垂直于这

条直綫时，正射影是一个点）；綫段的正射影不大于綫段本身.

在本书中，点和綫段的正射影一律簡称**射影**.

直角三角形中成比例綫段定理1 在直角三角形中，斜边上的高是两条直角边在斜边上的射影的比例中項.

已知 AB 是直角三角形 ABC 的斜边，$CD \perp AB$（图2·4）.

求証 $AD:CD=CD:BD$.

分析 要証 $AD:CD=CD:BD$，只要能証得 AD 和 CD，CD 和 BD 是两个相似三角形的对应边，在这里也就是只要能証直角三角形 $ACD \backsim$ 直角三角形 CBD 就可以了.

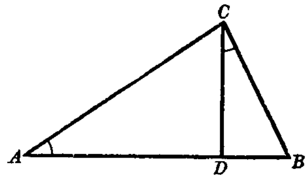


图 2·4

【証】 在直角三角形 ACD 和 CBD 中，$\because$ $\angle A=90°-\angle ACD$，$\angle BCD=90°-\angle ACD$，

$\therefore \angle A=\angle BCD$. $\triangle ACD \backsim \triangle CBD$，故 $\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{CD}{BD}$. 即

$$AD:CD=CD:BD.$$

直角三角形中成比例綫段定理2 在直角三角形中，每一条直角边是斜边和这一条直角边在斜边上的射影的比例中項.

已知 AB 是直角三角形 ABC 的斜边，$CD \perp AB$（图2·4）.

求証 $AD:AC=AC:AB$，$BD:CB=CB:AB$.

【証】 在直角三角形 ACD 和 ABC 中，$\angle A$ 为共有的銳角，因此 $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$. 从而有 $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AC}{AB}$，即 $AD:AC=AC:AB$.

同理可証 $BD:CB=CB:AB$.

例1. 半圓上一点 C 在直徑 AB 上的射影为 C'，C' 分 AB 成 $AC'=2\text{ cm}$，$C'B=8\text{ cm}$（图2·5）. 求 CC'，AC 和 BC 的长.

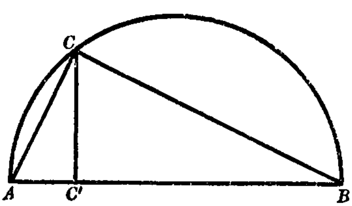


图 2·5

【解】 $\angle ACB$ 是半圓上的圓周角，所以它是直角，$\triangle ABC$ 为直角三角形.

根据直角三角形中成比例綫

段定理，有

$$AC':CC'=CC':C'B,\ CC'^2=AC'\cdot C'B,$$

$$CC'=\sqrt{AC'\cdot C'B}=\sqrt{2\cdot 8}=4.$$

$$AC':AC=AC:AB,\ AC^2=AC'\cdot AB,$$

$$AC=\sqrt{AC'\cdot AB}=\sqrt{AC'\cdot(AC'+C'B)}=\sqrt{2\cdot 10}=2\sqrt{5}\approx 4.47.$$

$$BC':BC=BC:AB,\ BC^2=BC'\cdot AB,$$

$$BC=\sqrt{BC'\cdot AB}=\sqrt{BC'\cdot(AC'+C'B)}=\sqrt{8\cdot 10}=4\sqrt{5}\approx 8.94.$$

答：CC' 为 4 厘米；AC 和 BC 約各为 4.47 厘米和 8.94 厘米.

例 2. 已知綫段 a，b（图 2·6）．求作綫段 a 和 b 的比例中項．

分析 要作綫段 a 和 b 的比例中項，只要作出一个直角三角形，使斜边上的高的垂足分斜边为 a，b 两部分，那末这条高就是 a 和 b 的比例中項．

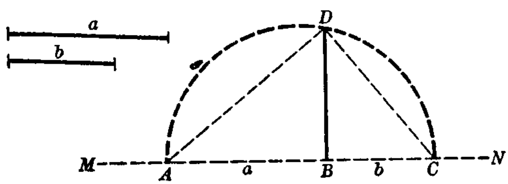


图 2·6

【作法 1】 作任意直綫 MN．在 MN 上截取綫段 $AB=a$，$BC=b$ $(AC=a+b)$．以 AC 为直徑作半圓．过 B 作 $BD\perp AC$，BD 交半圓于 D．綫段 BD 为求作的綫段．

【証】 連結 AD，DC．因为 $\angle ADC$ 是半圓上的圓周角，所以它是直角，$\triangle ACD$ 是直角三角形．

依据直角三角形中成比例綫段定理 1，有 $a:BD=BD:b$．

这个作图題还有另一个作法（图 2·7）．

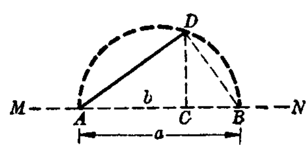


图 2·7

【作法 2】 作任意直綫 MN．在 MN 上截取綫段 $AB=a$，$AC=b$ $(CB=a-b)$．以 AB 为直徑作半圓．过

C 作 $DC \perp AB$. DC 交半圆于 D. 連結 AD. 則 AD 为求作的綫段.

証明 請讀者依据直角三角形中成比例綫段定理 2，自己写出来.

注意 求作已知两綫段的比例中項的作图方法有广泛的应用，讀者应当牢記.

例 3. 已知由三角形的頂点至它的对边所引的垂綫在此三角形內，而且垂綫长为对边被垂足所分成的两綫段的长的比例中項，証明这个三角形是一个直角三角形.

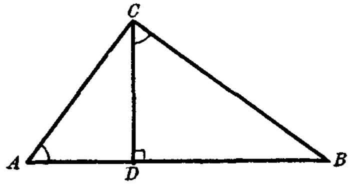


图 2·8

已知 在$\triangle ABC$中，$CD \perp AB$，且 $CD^2 = AD \cdot DB$（图 2·8）.

求証 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

【証】 在 $\triangle CDA$ 与 $\triangle BDC$ 中，从已知 $CD \perp AB$ 可知，$\angle CDA = \angle BDC = 90°$，$AD : CD = CD : DB$，也就是这两个直角三角形的直角边成比例. 根据直角三角形相似的判定定理，得 $\triangle CDA \backsim \triangle BDC$. $\therefore \angle CAD = \angle BCD$. 但是在 $\triangle ACD$ 中，$\angle CAD + \angle ACD = 90°$，从而 $\angle BCD + \angle ACD = 90°$. 由于 CD 是在$\triangle ABC$ 内的，$\therefore \angle BCD + \angle ACD = \angle ACB = 90°$. 这就証得了 $\triangle ABC$ 是一个直角三角形.

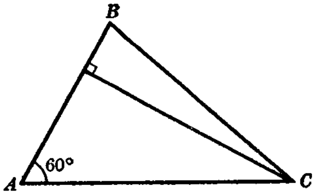
习 题 2·1

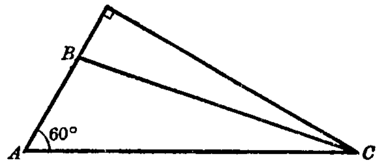
1. 在任意三角形中，試証明任意两边在第三边上的射影的和（或差）就是第三边.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC = 60°$，証明 BC 边在 AB 边上的射影是 AB 边与 $\frac{1}{2}AC$ 的差（图附后）.

3. 在直角三角形 ABC 中，BD 是斜边 AC 上的高（图附后），求証：

(1) $CB \times BD = BA \times CD$; (2) $BC \times BA = BD \times CA$.

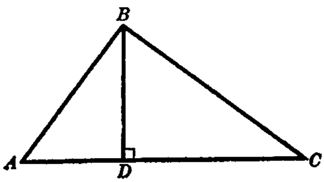




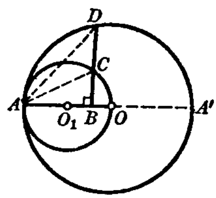
（第2题）

4．用圆 O 的半徑 OA 做直徑作一圓，过 OA 上任意点 B 引綫段 $BD\perp OA$，BD 交小圓于 C，交大圓于 D，連結 AC，AD．求証 $AD^2=2AC^2$．

［提示：延長 AO 为大圓的直徑 AA'（如图），利用关系式：$AD^2=AB\cdot AA'$，$AC^2=AB\cdot AO$ 来考慮．］



（第3题）



（第4题）

5．在第3题中，已知 $CD=9$cm，$AD=4$cm．求 BD，AB 和 BC 的長．

6．已知直角三角形一条直角边和斜边的長分别为15厘米和25厘米，求两条直角边在斜边上的射影和斜边上的高．

7．在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=13$dm，$BC=12$dm．$CD\perp AB$，D 是垂足．求 AD，CD 和 AC 的長．

8．在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，CD 是斜边 AB 上的高．已知 $CD=60$mm，$AD=25$mm．求 BD，AB，AC 和 BC 的長．

9．作出 $\square ABCD$ 的各边在对角綫 AC 上的射影．

10．已知綫段 a 和 b，求作綫段 x，使：

(1) $x^2=2ab$ ［提示：x 是 $2a$ 和 b 的比例中項］；

(2) $x=\sqrt{2}a$ ［提示：把等式两端平方得 $x^2=2a\cdot a$］；

(3) $x=\sqrt{\frac{2}{3}}a$；　(4) $x=\sqrt{3ab}$；　(5) $x=2\sqrt{ab}$．

§2·2 勾股定理

我們将研究关于直角三角形三边間的度量关系．我国古代的

数学家把直角三角形較短的一条直角边称为“勾”，較长的一条直角边称为“股”，斜边称为“弦”，因此我們把确定直角三角形三条边之間的度量关系的定理称为“勾股定理”.

勾股定理 直角三角形斜边的平方等于两条直角边的平方和.

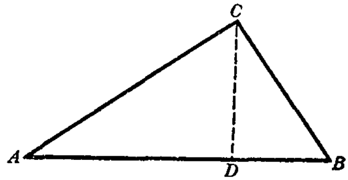


图 2·9

已知 在三角形 ABC 中，$\angle C=90°$ (图 2·9).

求証 $AB^2=BC^2+CA^2$.

【証】 作 $CD\perp AB$. 依据直角三角形中成比例綫段定理 2，有

$$AD:CA=CA:AB,\quad 即\ CA^2=AD\cdot AB,\qquad (1)$$

$$DB:BC=BC:AB,\quad 即\ BC^2=DB\cdot AB.\qquad (2)$$

(1)式加(2)式，得

$$\begin{aligned}CA^2+BC^2&=AD\cdot AB+DB\cdot AB\\&=(AD+DB)AB.\end{aligned}$$

但 $AD+DB=AB$，

$$\therefore\quad AB^2=BC^2+CA^2.$$

注意 勾股定理是一个十分重要而著名的定理，不少的計算公式都从勾股定理推导而来. 我国从前的数学家对这条定理做了不少研究. 远在公元前 1120 年，在«周髀算經»內就有“勾广三，股修四，徑隅五”的記載.

例 1. 已知菱形 $ABCD$ 的对角綫 AC 和 BD 分别等于 22 厘米和 10 厘米，求菱形一边的长(图 2·10).

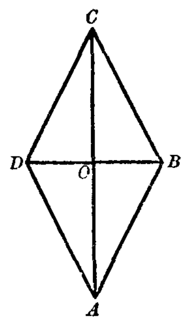


图 2·10

【解】 我們已經学过，菱形的对角綫互相垂直平分. 設 O 是 AC 和 BD 的交点，显然 $\triangle BCO$ 为直角三角形，它的直角边 OC 和 OB 分别为 11 厘米和 5 厘米. 由勾股定理，得

$$BC^2=OC^2+OB^2=11^2+5^2=146,$$

$$\therefore \quad BC=\sqrt{146}\approx 12.1.$$

答：菱形的一边約为 12.1 厘米。

例 2. 已知等边三角形 ABC 的高 AD 为 10 厘米，求一边的长(图 2·11)。

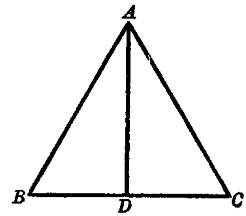


图 2·11

【解】 設三角形 ABC 的一边为 x, BC 上的高为 AD. 显然三角形 CAD 是直角三角形. 根据"等腰三角形的高也是底边上的中綫"的理由，$\triangle CAD$ 的三边分别为 $AD=10$, $DC=\frac{x}{2}$, $AC=x$. 依据勾股定理，得

$$x^2=10^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2, \quad \frac{3}{4}x^2=10^2, \quad x=\frac{20}{3}\sqrt{3}\approx 11.5.$$

答：等边三角形一边的長約为 11.5 厘米。

例 3. 已知等腰梯形 $ABCD$ 的上底 CD, 下底 AB, 腰 BC 分别等于 4 厘米，10 厘米，5 厘米. 求梯形的高 CE 和对角綫 AC 的长(图 2·12)。

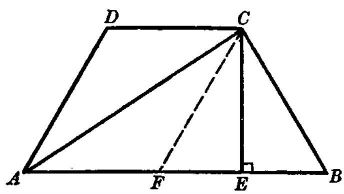


图 2·12

【解】 过 C 引 $CF \parallel AD$, CF 交 AB 于 F.

$\because$ $AFCD$ 为平行四边形，

$\therefore AF=CD=4$. 从而 $FB=AB-AF=10-4=6$.

且 $CF=AD=CB$. 从而 $\triangle FBC$ 为等腰三角形，它的高 CE 平分底边 FB, 即 $FE=EB=3$, 并且 $AE=AF+FE=4+3=7$.

在直角三角形 BCE 里，

$$CE=\sqrt{BC^2-EB^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4,$$

在直角三角形 AEC 里，

$$AC=\sqrt{CE^2+AE^2}=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{65}\approx 8.0.$$

答：梯形 $ABCD$ 的高 CE 为 4 厘米，对角綫 AC 約为 8.0 厘米。

例 4. 求作一条綫段，使它等于已知两綫段的平方和的平方根.

已知 綫段 a 和 b(图 2·13).

求作 綫段 x, 使

$$x=\sqrt{a^2+b^2}.$$

【作法】 用 a 和 b 作直角边，作直角三角形 ABC. 斜边 AB 就是求作的綫段.

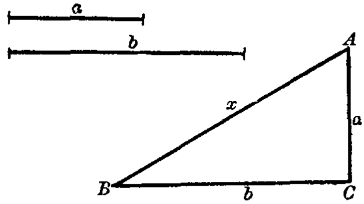


图 2·13

【証】 由勾股定理，$x^2=a^2+b^2$,

即
$$x=\sqrt{a^2+b^2}.$$

例 5. 求作一条綫段，使它等于已知两綫段的平方差的平方根.

已知 綫段 a 和 b, $a>b$ (图 2·14).

求作 綫段 x, 使

$$x=\sqrt{a^2-b^2}.$$

【作法】 用 a 和 b 分别作斜边和直角边，作直角三角形 ABC. 另一直角边 BC 就是求作的綫段.

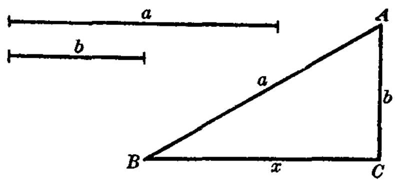


图 2·14

【証】 由勾股定理，$a^2=x^2+b^2$,

即
$$x=\sqrt{a^2-b^2}.$$

习 題 2·2

1. 已知正方形的边長为 10 厘米，求它对角綫的長.
2. 如果等边三角形的边長为 a, 求它的高 h.
3. 矩形的对角綫是 5 厘米，一边長是 4 厘米，求它另一边的長.
4. 等腰直角三角形的底边为 c, 求它的腰長.
5. 以 a 与 b 表示两直角边，c 表示斜边，h 表示斜边上的高，p 和 q 分别表示直角边 a 和 b 在斜边上的射影. 根据下列的已知元素，求直角三角形

中的其他元素:

(1) $a=16$, $b=12$; (2) $a=5$, $c=13$;

(3) $b=17$, $h=15$; (4) $c=122$, $p=50$;

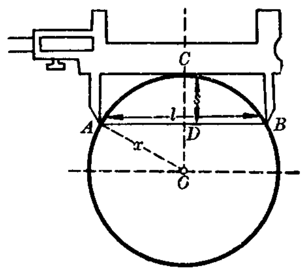
(5) $p=1$, $q=9$; (6) $a=3$, $p=1.8$;

(7) $h=18$, $q=12$; (8) $a=40$, $c=41$.

6. 菱形的周長为 8 米，一条对角綫为 2.4 米. 求第二条对角綫的長.

7. 为了要測出圓柱的直徑 d, 使用如图所示的卡尺. 卡尺的脚長 $s=25\text{mm}$, 两脚間的距离为 $l=20\text{cm}$; 求直徑 d 与 s, l 的关系式,从而求圓柱的直徑 d 的長.

[提示: l 是圓的弦,它的長是已知的, s 是在垂直于弦的半徑上夹于弦、弧之間的部分,因此可用勾股定理求出半徑.]



(第 7 題)

8. 一建筑物的截面为半圓形, 現在要在这截面內立两个等高的支柱,并且使这两个支柱間的距离为 2 米. 設半圓的直徑为 4 米, 求柱的高(精确到 1 厘米).

9. 設在直角三角形中,勾为 a, 股为 b, 弦为 c. 如果它們是三个連續的自然数,求出 a, b 和 c.

[提示: 設 $a=b-1$, $c=b+1$.]

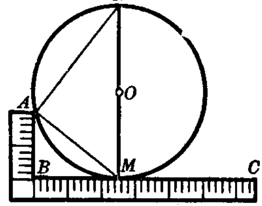
10. 直立在地上的旗竿, 有一根绳从竿頂垂下, 绳碰到地后还有 3 尺. 把绳的着地端移动,到离开竿足 8 尺的一点恰巧把绳拉直. 問这根旗竿有多高?

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C$ 是直角, 而 D 为 BC 上任意一点. 求証 $AB^2-AD^2=BC^2-DC^2$.

12. 求証直角三角形勾和股在弦上射影的比, 等于勾和股的平方的比.

13. 如图. ABC 是一把測徑器, $\angle ABC$ 是直角, AB 的長等于 a, BC 上有以 B 为零的刻度, A 在圓上, BC 与圓相切于 M. 如果 $BM=l$, 試証明直徑 $MN=\dfrac{a^2+l^2}{a}$.

[提示: 証明 $\triangle MAN\backsim\triangle ABM$.]



(第 13 題)

14. 求証:在直角三角形中, 勾股的乘积, 等于弦与弦上的高的乘积.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的高, E 是 AD 上任意一点. 証明 $AB^2-EB^2=AC^2-EC^2$.

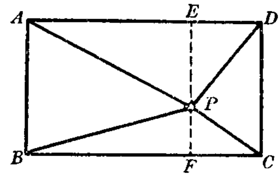
16. 如果 AD, BE 和 CF 分别是 $\triangle ABC$ 三边上的高，求証 $BD^2+CE^2+AF^2=CD^2+AE^2+BF^2$.

*17. 已知直角三角形的两条直角边为 a 和 b, c 是斜边. d 为内切圆的直徑. 証明 $d=\dfrac{2ab}{a+b+c}$

[提示：利用三角形頂点到切点的距离間的关系，求出 d，再利用勾股定理.]

18. 从矩形内（或外）的任意一点到两对角頂点的联綫的平方和相等.

[提示：假設矩形內的任意一点 P 在矩形对边上的射影为 E 与 F，如图. 用勾股定理，試求 $PA^2=$? $PC^2=$? 然后相加. 再比較 PB^2 与 PD^2 的和，是否可以相等.]

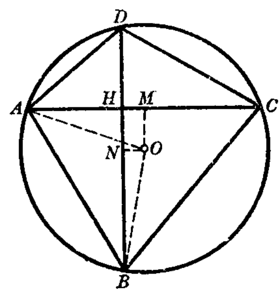


（第 18 題）

19. 在四边形 $ABCD$ 中，如果对角綫 $AC\perp BD$，那么，$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

*20. 如果在圓 O 中两弦 $AC\perp BD$，那么 $AB^2+CD^2=d^2$，其中 d 是圓 O 的直徑.

[提示：如图. M 和 N 各为 AC 和 BD 的中点. 先証 $AB^2+CD^2=AH^2+BH^2+CH^2+DH^2$，再証 $AH^2+HC^2=2(AM^2+ON^2)$，$BH^2+HD^2=2(BN^2+OM^2)$；最后証明 $AB^2+CD^2=4R^2$ 即得.]



（第 20 題）

§2·3 勾股定理的推广

在三角形里，直角对边的平方等于其他两边的平方的和，这就是勾股定理；銳角的对边或者鈍角的对边和其他两边是否也有类似的关系呢？

先研究图 2·15 中的三个三角形.

$\triangle ABC$ 是一个直角三角形，$\angle C=90°$，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$. 由勾股定理，得 $c^2=a^2+b^2$.

$\triangle A_1B_1C_1$ 是一个鈍角三角形，$\angle C_1>90°$. $B_1C_1=a$，$C_1A_1=b$，

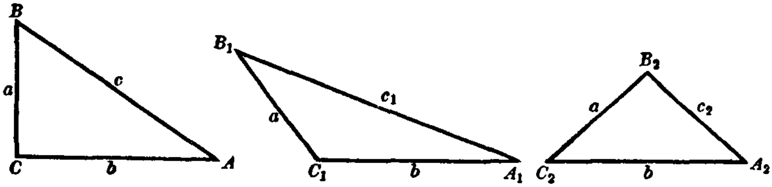


图 2·15

$A_1B_1=c_1$. 根据两个三角形的边角关系定理:“两个三角形有两条边对应相等,如果这两条边所夹的角大,这个角所对的边也大”,所以有 $c_1>c$, 从而 $c_1^2>c^2$. 即 $c_1^2>a^2+b^2$.

$\triangle A_2B_2C_2$ 的 $\angle C_2<90°$, $B_2C_2=a$, $C_2A_2=b$, $A_2B_2=c_2$. 同样根据两个三角形的边角关系定理, 有 $c_2<c$, 从而 $c_2^2<c^2$, 即 $c_2^2<a^2+b^2$.

从上面的討論, 可見三角形的一个鈍角的对边的平方大于其他两边的平方和,一个銳角的对边的平方小于其他两边的平方和,只有一个直角的对边(斜边)正好等于其他两边的平方和.

下面的两条定理, 将分别精确地指出三角形中銳角或鈍角的对边和其他两边的关系.

勾股定理的推广 1 三角形的銳角对边的平方,等于其他两边平方的和, 减去两边中的一边与另一边在它上面的射影的乘积的两倍.

已知 三角形 ABC 的 $\angle C<90°$. BC 在 CA 上的射影为 CD (图 2·16).

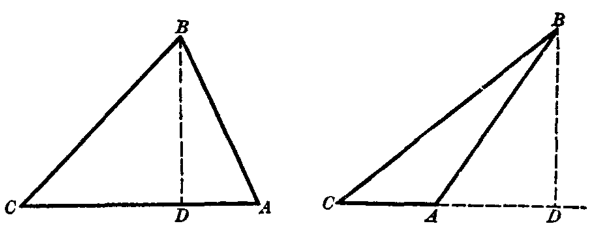


图 2·16

求証 $AB^2=BC^2+CA^2-2CA\cdot CD$.

【証】 $\because$ 三角形 ABD 为直角三角形,

$$\therefore \quad AB^2=BD^2+DA^2. \qquad (1)$$

但

$$DA=CA-CD \text{ (或 } DA=CD-CA). \qquad (2)$$

又因三角形 BCD 为直角三角形,

$$\therefore \quad BD^2+CD^2=BC^2,$$

即

$$BD^2=BC^2-CD^2. \qquad (3)$$

将(2), (3)两式代入(1)式, 得

$$AB^2=(BC^2-CD^2)+(CA-CD)^2,$$

或

$$AB^2=(BC^2-CD^2)+(CD-CA)^2,$$

即

$$AB^2=BC^2+CA^2-2CA\cdot CD.$$

勾股定理的推广 2 三角形的鈍角对边的平方, 等于其他两边平方的和, 加上两边中的一边与另一边在它上面的射影的乘积的两倍.

已知 三角形 ABC 中, $\angle C>90^\circ$. BC 在 AC 上的射影为 CD(图 2·17).

求証 $AB^2=BC^2+CA^2+2CA\cdot CD$.

【証】 $\because$ 三角形 ABD 为直角三角形,

$$\therefore \quad AB^2=BD^2+DA^2. \qquad (1)$$

但

$$DA=CD+CA. \qquad (2)$$

又因三角形 BCD 为直角三角形,

$$\therefore \quad BD^2+CD^2=BC^2,$$

即

$$BD^2=BC^2-CD^2. \qquad (3)$$

将(2), (3)两式代入(1)式, 得

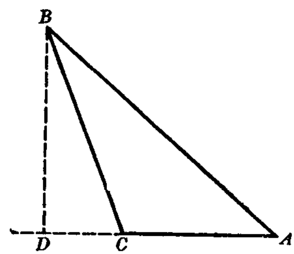


图 2·17

$$AB^2=(BC^2-CD^2)+(CD+CA)^2,$$

即 $$AB^2=BC^2+CA^2+2CA\cdot CD.$$

关于上面的两条定理，在証明过程里，取 CA 在 BC 上的射影也是可以的. 在图 2·18 里，CE 是 CA 在 BC 上的射影，請讀者証明直角三角形 $CBD\backsim$ 直角三角形 CAE，从而推出 $CA\cdot CD=BC\cdot CE$.

注意 当 $\angle C=90^\circ$ 时，$BC\perp AC$. BC 在 CA 上的射影退縮为一个点，即 $CD=0$. 前面两条定理的結論都成为 $AB^2=BC^2+CA^2$. 这就是勾股定理.

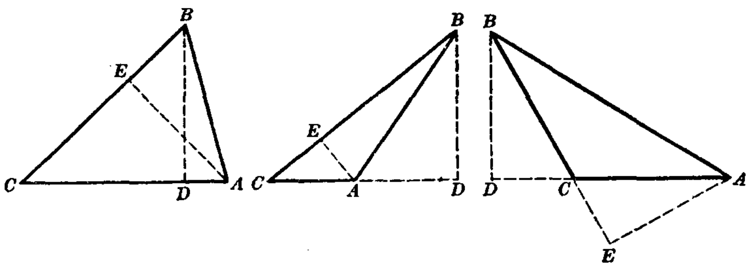


图 2·18

§2·4 勾股定理的逆定理

勾股定理的逆定理 如果一个三角形两边平方的和等于第三边的平方，那末这个三角形是直角三角形. 第三边所对的角是直角.

已知 $\triangle ABC$ 中，$BC^2+CA^2=AB^2$(图 2·19).

求証 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle C=90^\circ$.

【証】 用反証法. 如果 $\angle C\neq 90^\circ$，那么 $\angle C<90^\circ$，或者 $\angle C>90^\circ$.

如果 $\angle C<90^\circ$，由勾股定理的推广 1 得 $BC^2+CA^2>AB^2$. 这和已知条件矛盾，所以

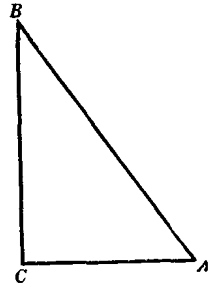


图 2·19

$\angle C$ 不能小于 90°.

如果 $\angle C>90^\circ$, 由勾股定理的推广 2, 得 $BC^2+CA^2<AB^2$. 这又和已知条件矛盾, 所以 $\angle C$ 又不能大于 90°.

因此 $\angle C$ 只能等于 90°, $\triangle ABC$ 为直角三角形.

例 1. 已知三角形 ABC 三边的长为: (1) $BC=48$ cm, $CA=14$ cm, $AB=50$ cm; (2) $BC=m^2-n^2$, $CA=2mn$, $AB=m^2+n^2$ ($m>0$, $n>0$, $m>n$). 求証 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

【証】 (1) $\because$
$$BC^2+CA^2=48^2+14^2 =2304+196 =2500.$$

而
$$AB^2=2500.$$
$$\therefore\quad BC^2+CA^2=AB^2.$$

由勾股定理的逆定理知 $\triangle ABC$ 为直角三角形, $\angle C=90^\circ$.

(2) $\because$
$$\begin{aligned}BC^2+CA^2&=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2\\&=m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2\\&=m^4+2m^2n^2+n^4\\&=(m^2+n^2)^2,\end{aligned}$$

而
$$AB^2=(m^2+n^2)^2.$$
$$\therefore\quad BC^2+CA^2=AB^2.$$

由勾股定理的逆定理知 $\triangle ABC$ 为直角三角形. $\angle C=90^\circ$.

例 2. 試証平行四边形两条对角綫平方的和等于它各边平方的和.

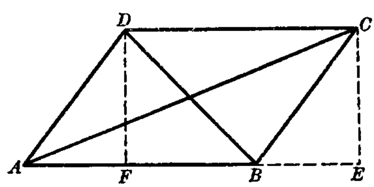


图 2·20

已知 平行四边形 $ABCD$, AC, BD 是对角綫(图 2·20).

求証 $AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$.

【証】 在一般平行四边形里, 总有一个角是銳角. 現在 $\angle DAB$ 为銳角. $\because \angle CBA=180^\circ-\angle DAB$, $\therefore \angle CBA$ 为鈍角.

設 AD 在 AB 上的射影为 AF, BC 在 AB 上的射影为 BE. 在直角三角形 ADF 和 BCE 中, AD 和 BC 为平行四边形的对边, 所以相等, $\angle DAF$ 和 $\angle CBE$ 为平行綫的同位角, 所以相等. 根据直角三角形全等判定定理 2, $\triangle ADF \cong \triangle BCE$, 从而

$$AF=BE.$$

对 $\triangle ABD$, 应用勾股定理的推广 1, 得

$$BD^2=DA^2+AB^2-2AB\cdot AF. \tag{1}$$

对 $\triangle ABC$, 应用勾股定理的推广 2, 得

$$AC^2=AB^2+BC^2+2AB\cdot BE. \tag{2}$$

利用 $AF=BE$ 的关系,将(1), (2)两式相加,得

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+AB^2+DA^2. \tag{3}$$

但 AB, CD 为平行四边形的对边,因此相等. (3)式可以写为

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2.$$

如果平行四边形 $ABCD$ 的 $\angle DAB=90°$, 那末它就成为矩形,三角形 ABD 和 ABC 都成为直角三角形. 应用勾股定理,得

$$BD^2=DA^2+AB^2, \tag{1}$$

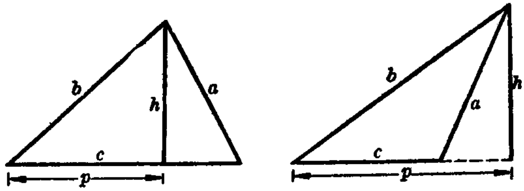
$$AC^2=AB^2+BC^2. \tag{2}$$

(1),(2)两式相加, 且利用关系 $AB=CD$, 得

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2.$$

习 題 2·3~2·4

1. 假設在三角形中夹銳角的两边为 b 和 c, b 边在 c 边上的射影为 p. 当 b, c, p 分别为下列数值时,求这銳角的对边 a:



(第 1 題)

(1) $b=8$, $c=5$, $p=4$; (2) $b=5$, $c=6$, $p=3$;

(3) $b=24$, $c=9$, $p=12$; (4) $b=13$, $c=14$, $p=12$;

(5) $b=17$, $c=9$, $p=15$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=60°$，夹 $\angle A$ 的两边 b 和 c 的長分别为下列各数值，求 a 边的長：

(1) $b=10$, $c=16$; (2) $b=14$, $c=30$;

(3) $b=9$, $c=24$; (4) $b=48$, $c=13$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$, $b=4$, $c=3$. 求 a 边長.

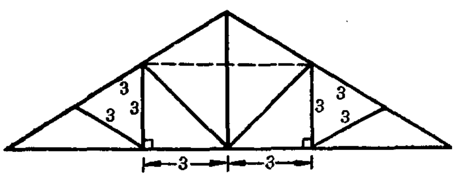
4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=13\text{cm}$, $BC=14\text{cm}$, $CA=15\text{cm}$. 求 AB 边在 AC 边上射影的長.

5. 設在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=45°$, $a=2\,\text{dm}$, $c=3\,\text{dm}$. 計算 $\angle B$ 的对边 b 的長.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=120°$，証明 $BC^2=AB^2+AC^2+AB\cdot AC$.

7. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C=120°$，它的夹边分别等于 30 厘米和 50 厘米. 求 AB 边的長.

8. 如图的一个鉄质梁架的图样，其中所注数字是这根鉄条的長，用米来表示. 試求整个梁架所需用鉄条的長.

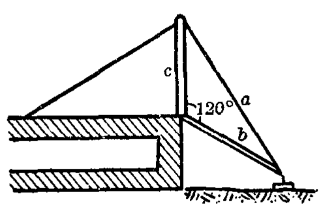


(第 8 題)

[提示：图中虚綫是添加的輔助綫. 应該从确定三角形的角开始来求問題的解.]

9. 設 AM 为直角三角形 ABC 斜边 BC 上的中綫. 求証 $BC^2+CA^2+AB^2=8AM^2$.

[提示：$BC=2AM$.]



(第 10 題)

10. 附图是表示起重机的略图，它的直柱 $c=3.5\text{m}$，吊桿 $b=4\text{m}$；直柱和吊桿間的最大角为 $120°$，試求吊鏈的長 a.

11. 在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$. 求証它的对角綫

AC 与 BD 互相垂直.

[提示：用反証法，由勾股定理的推广引出矛盾.]

12. 已知三角形三边的比如下，試求这些三角形中哪些是銳角的、直角的或鈍角的三角形：

(1) 4:13:14;　　(2) 13:10:15;

(3) 7:24:25;　　(4) 13:30:37;

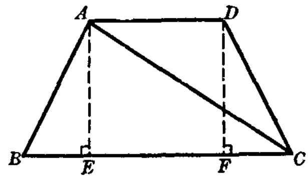
(5) 9:40:41;　　(6) 17:40:41.

13. 已知平行四边形的两条邻边各为 3 厘米和 4 厘米，一角为 60°. 求两条对角綫的長.

14. 已知平行四边形两条对角綫的長分别等于 l_1 和 l_2，該平行四边形有一边的長为 a，求另一边的長.

15. 求証任意四边形两对角綫的平方和，等于各对边中点联結綫段平方和的二倍.

*16. 証明，等腰梯形一对角綫的平方，等于一腰的平方加上二底的乘积.



(第 16 題)

[提示：如图. 梯形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，設 $\angle B$ 是銳角. 由 A 作 $AE\perp BC$，那么，$AC^2=AB^2+BC^2-2BC\cdot BE=AB^2+BC(BC-2BE)$. 現在要証 $AC^2=AB^2+BC\cdot AD$，因此，只要設法能証明 $AD=BC-2BE$ 就可以了.]

§2·5 三角形的中綫、高、外接圓半徑和角平分綫的計算公式

已知三角形三边，我們来求三角形的中綫、高、外接圓半徑和角平分綫的長度的計算公式. 在下面的推导里，我們規定：

(1) $\triangle ABC$ 的三边：$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$.

(2) $\triangle ABC$ 的周長 $a+b+c=2s$，从而

$$a+b-c=a+b+c-2c=2s-2c=2(s-c),$$
$$a-b+c=a+b+c-2b=2s-2b=2(s-b),$$
$$-a+b+c=a+b+c-2a=2s-2a=2(s-a).$$

(3) $\triangle ABC$ 中，在 BC, CA, AB 上的中綫分别为：m_a, m_b, m_c.

(4) $\triangle ABC$ 中，在 BC, CA, AB 上的高分别为：h_a, h_b, h_c.

(5) $\triangle ABC$ 的外接圓半徑为 R.

(6) $\triangle ABC$ 的 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的平分綫分别为 t_a, t_b, t_c.

(i) 求中綫：設 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中綫 $AM=m_a$, 延長 AM 到 E, 使 $ME=AM$ (图 2·21). 連接 BE 和 EC.

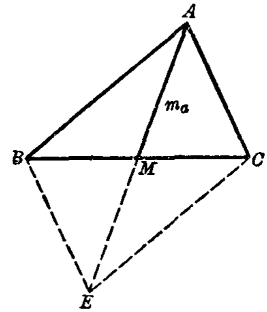


图 2·21

四边形 $ABEC$ 的两对角綫 AE 和 BC 互相平分，根据平行四边形判定定理3，四边形 $ABEC$ 为平行四边形.

应用前面例 2 的結論，我們有

$AE^2+BC^2=AB^2+BE^2+EC^2+CA^2$.

即 $(2m_a)^2+a^2=2b^2+2c^2$.

$4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2$.

$$\therefore \quad m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

同理，有

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}, \quad m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

(ii) 求高：在 $\triangle ABC$ 中，引高 $AH=h_a$ (图 2·22). 在 $\angle B$ 和 $\angle C$ 中，至少有一个角是銳角，設 $\angle B$ 为銳角，并設 AB 在 BC 上的射影 $BH=c'$.

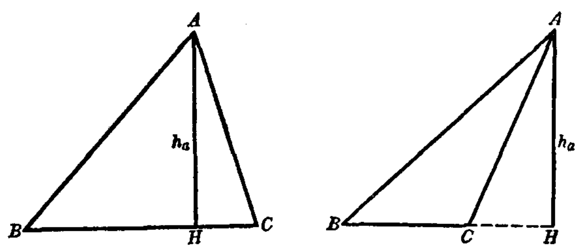


图 2·22

应用勾股定理的推广 1，得

$$CA^2=AB^2+BC^2-2BC\cdot BH,$$

即

$$b^2=c^2+a^2-2ac'. \tag{1}$$

从(1)式知

$$c'=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}. \tag{2}$$

但 $\triangle ABH$ 为直角三角形，应用勾股定理，得

$$AH^2=AB^2-BH^2,$$

即

$$h_a^2=c^2-c'^2. \tag{3}$$

由(2)和(3)式，得

$$\begin{aligned}
h_a^2&=c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2\\
&=\left(c+\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c-\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\\
&=\frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{2a}\ \frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2a}\\
&=\frac{1}{4a^2}[(a^2+2ac+c^2)-b^2]\cdot[b^2-(a^2-2ac+c^2)]\\
&=\frac{1}{4a^2}[(a+c)^2-b^2]\cdot[b^2-(a-c)^2]\\
&=\frac{1}{4a^2}(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)\\
&=\frac{1}{4a^2}2s\cdot2(s-b)\cdot2(s-c)\cdot2(s-a)\\
&=\frac{4}{a^2}\cdot s(s-a)(s-b)(s-c),
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

同理，有

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

(iii) 求外接圆半径：設 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 的直径为 AD，它的半径 OA 或 OD 等于 R。引高 AH（图 2·23）。

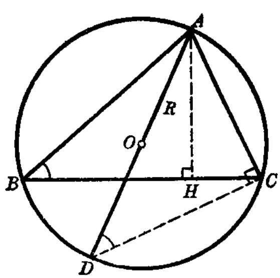


图 2·23

在 $\triangle ABH$ 和 $\triangle ADC$ 中，$\angle AHB=90°$。$\because$ $\angle ACD$ 为半圆上的圆周角，$\therefore$ $\angle ACD=90°$。

$\because$ $\angle B$, $\angle D$ 为同弧上的圆周角，$\therefore$ $\angle B=\angle D$。依据三角形相似判定定理1，有

$$\triangle ABH\backsim\triangle ADC.$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AD}=\frac{AH}{AC},$$

或
$$\frac{c}{2R}=\frac{h_a}{b}.$$

即
$$R=\frac{bc}{2h_a}.$$

由于
$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\therefore \quad R=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

(iv) 求角平分綫：在 $\triangle ABC$ 中，AD 平分 $\angle A$，DA' 为 AD 在 BC 上的射影（图 2·24）。根据三角形內角平分綫的性质，有

$$BD:DC=AB:AC.$$

即
$$(a-DC):DC=c:b,$$

$$DC=\frac{ab}{b+c}.$$

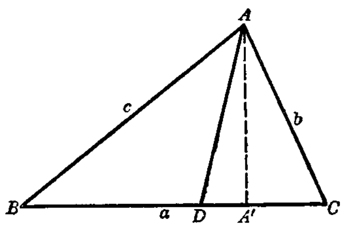


图 2·24

从而
$$BD=a-DC=a-\frac{ab}{b+c}=\frac{ac}{b+c}.$$

对 $\triangle ADC$ 应用勾股定理的推广 1，得

$$AC^2=AD^2+DC^2-2DC\cdot DA',$$

即

$$b^2=t_a^2+\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2-2\cdot\frac{ab}{b+c}\cdot DA'. \tag{1}$$

对 $\triangle ABD$ 应用勾股定理的推广 2，得

$$AB^2=AD^2+BD^2+2BD\cdot DA',$$

即

$$c^2=t_a^2+\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2+2\cdot\frac{ac}{b+c}\cdot DA'. \tag{2}$$

以 c 乘 (1) 式，以 b 乘 (2) 式，然后相加，得

$$cb^2+bc^2=ct_a^2+c\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2+bt_a^2+b\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2.$$

即
$$bc(b+c)=(b+c)t_a^2+\frac{a^2bc(b+c)}{(b+c)^2},$$

$$t_a^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$=bc\left[1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right]$$

$$=bc\cdot\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{bc}{(b+c)^2}\cdot 2s\cdot 2(s-a).$$

$$\therefore\quad t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}.$$

同理，
$$t_b=\frac{2}{c+a}\sqrt{cas(s-b)},$$

$$t_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}.$$

习 題 2·5

1．已知三角形的三边分别为 16, 18 和 26．求最大边上中綫的長．

2．在 $\triangle ABC$ 中，$BC=8\,\text{cm}$，$AC=11\,\text{cm}$，AB 边上的中綫長为 $8.5\,\text{cm}$．求 AB 边的長．

3．在 $\triangle ABC$ 中，$BC=28\,\text{dm}$，$AB=32\,\text{dm}$，AB 边上的中綫長为 $38\,\text{dm}$．求 AC 边的長．

4．如果一个三角形的三条中綫为 m_a，m_b，m_c，那末 $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$．

5．已知三角形的三边 a, b, c 的長为下列各数，求 c 边上的高 h_c：

(1) $a=10$, $b=17$, $c=21$;　　(2) $a=20$, $b=13$, $c=21$;

(3) $a=20$, $b=13$, $c=25$;　　(4) $a=37$, $b=13$, $c=40$;

(5) $a=39$, $b=45$, $c=42$.

6．梯形的底等于 7 分米和 2 分米，它的腰等于 6 分米和 5 分米，求梯形的高．

*7．已知梯形的底为 a 与 c，腰为 b 和 d．試求出它的高和两条对角綫的長．若設 $a=6$, $b=3$, $c=1$, $d=4$．計算其結果．

8．已知三角形的三边之長：

(1) $a=17$, $b=8$, $c=15$;　　(2) $a=10$, $b=17$, $c=21$.

求它的外接圓的半徑．

9. 在任何三角形中，外接圓的直徑，等于任意两边之积除以第三边上的高.

10. 在任何三角形中，角平分綫的平方，等于夹这角的两边的乘积，减去第三边上两綫段之积.

和圓有关的綫段間的度量关系

§2·6 关于圓的切綫和割綫間的度量关系

現在研究和圓有关的各綫段間的关系. 这里所謂和圓有关的綫段，主要是指圓的弦和圓的切綫或割綫上的綫段. 下面的几条定理将說明它們之間的关系.

割綫定理 从圓外一点到圓引两条割綫，一条割綫和它在圓外部分的积，等于另一条割綫和它在圓外部分的积.

已知 PAB 和 PCD 是圓的两条割綫. PAB 交圓于 A, B. PCD 交圓于 C, D (图 2·25).

求証 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

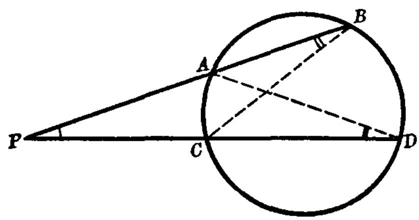


图 2·25

分析 等式 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ 可以变形为 $\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB}$. 要証 $\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB}$，只要証明 PA, PC 和 PD, PB 是两个相似三角形的两組对应边. 为此，連結 AD 和 CB. 只要証明 $\triangle PAD \backsim \triangle PCB$ 就可以了.

【証】 連結 AD 和 CB. 在 $\triangle PAD$ 和 $\triangle PCB$ 中，

$$\because \quad \angle APD=\angle CPB, \quad \angle PDA=\angle PBC.$$

$$\therefore \quad \triangle PAD \backsim \triangle PCB. \text{ 从而 } \frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB},$$

即 $$PA \cdot PB = PD \cdot PC.$$

切綫割綫定理 从圓外一点到圓所引的割綫，和它在圓外部

分的积等于从这一点到圓的切綫的平方.

已知 PAB 和 PT 分别是从圓外一点 P 到圓所引的割綫和切綫(图 2·26).

求証 $PA \cdot PB = PT^2$.

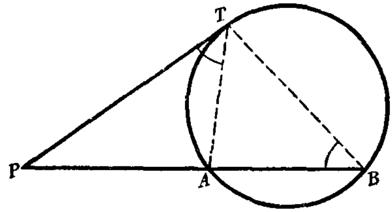


图 2·26

分析 等式 $PA \cdot PB = PT^2$ 可以变形为 $\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB}$. 要証 $\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB}$, 只要証明 PA, PT 和 PT, PB 是两个相似三角形的两組对应边. 为此,連結 AT 和 BT. 只要証明 $\triangle PAT \backsim \triangle PTB$ 就可以了.

【証】 連結 AT 和 BT. 在 $\triangle PAT$ 和 $\triangle PTB$ 中,

$$\because \quad \angle APT = \angle TPB, \ \angle ATP = \angle TBP.$$

$$\therefore \quad \triangle PAT \backsim \triangle PTB. \text{ 从而 } \frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB},$$

即 $$PA \cdot PB = PT^2.$$

例 1. 圓 O 的割綫 PAB 交圓 O 于 A 和 B (图 2·27). 已知 $PA = 6\text{cm}$, $AB = 7\frac{1}{3}\text{ cm}$, $PO = 12\text{cm}$. 求圓 O 的半徑.

【解】 設圓 O 的半徑为 r, PO 和它的延长綫交圓 O 于 C 和 D. 依据割綫定理,得

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

$$\because \quad PA = 6,$$

$$PB = PA + AB = 13\frac{1}{3}.$$

$$PC = PO - CO = 12 - r,$$

$$PD = PO + OD = 12 + r,$$

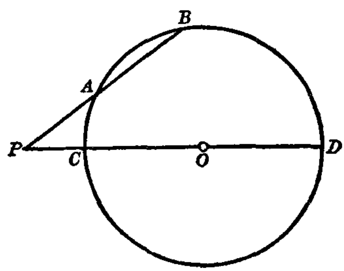


图 2·27

$$\therefore \quad 6 \times 13\frac{1}{3} = (12 - r)(12 + r),$$

即 $$80 = 144 - r^2.$$

$$r^2 = 64, \ r = 8.$$

答: 圓 O 的半徑为 8 厘米.

例 2．求証：两个相交圓的公共弦的延长綫上任一点到两圓所作的切綫等长．

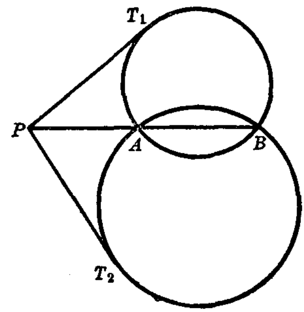


图 2·28

已知 P 为两圓公弦 AB 的延长綫上任意点，PT_1 和 PT_2 为从点 P 到两圓所引的切綫(图 2·28)．

求証 $PT_1=PT_2$．

【証】 $\because$ PAB 和 PT_1 分别为从点 P 到一个圓所引的割綫和切綫，根据切綫割綫定理，$PT_1^2=PA\cdot PB$．

同理，$PT_2^2=PA\cdot PB$． $\therefore$ $PT_1=PT_2$．

例 3．已知点 B 为綫段 AC 上的任意点．过 A 引綫段 AD，使 AD 为 AB 和 AC 的比例中項．求証 AD 切 B, C, D 三点所决定的圓于 D(图 2·29)．

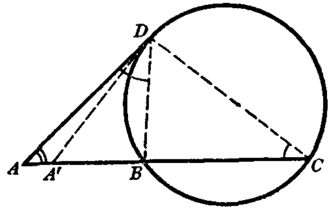


图 2·29

【証】 作 B, C, D 三点所决定的圓．連結 BD 和 CD．在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 中，有

$$\angle BAD=\angle DAC,\quad \frac{AB}{AD}=\frac{AD}{AC}.$$

根据三角形相似判定定理 2，有

$$\triangle ABD \backsim \triangle ADC.$$

由相似三角形对应角相等的性质，得

$$\angle ADB=\angle ACD. \qquad (1)$$

过 D 引圓的切綫 $A'D$, $A'D$ 交 AC 于 A'．依据弦切角定理的推論："弦切角等于它所夹的弧上的圓周角"，得

$$\angle A'DB=\angle ACD. \qquad (2)$$

比較(1)，(2)两式，得

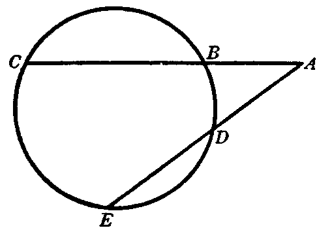
$$\angle ADB=\angle A'DB.$$

依据两角相等的定义，AD 和 $A'D$ 重合．由此可知 AD 切 B, C, D 三点所决定的圆于 D.

注意 在例 3 的証明里，用了同一法．同时，請讀者考虑例 3 和切綫割綫定理的关系．

习 題 2·6

1．已知一圓的两弦 CB 与 ED 交于圓外的点 A，試按下列条件，分别計算所要求的綫段长：(1) $AB=4\text{ cm}$，$BC=6\text{cm}$，$AD=5\text{cm}$，求 AE；(2) $AC=9\text{cm}$，$BC=5\text{cm}$，$AE=12\text{cm}$，求 DE．

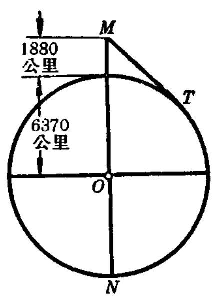


(第 1 題)

2．在 $\angle A$ 的两边上分别有 B, C 和 D, E 各点，如果 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$，那末 B, C, D, E 四点在同一圓上（本題是割綫定理的逆定理）．

3．AB 是一圓的切綫，B 是切点，ACD 是割綫，C 和 D 是割綫和圓的交点．已知 $AB=4\text{cm}$，$AC=2\text{cm}$，求 CD 的长．又，如果 $AC=a$，$AB=CD$，求 AB 的长．

4．地球半徑約是 6370 公里，有一顆慧星距地面是 1880 公里．地面上能观察到这顆慧星的最远的地方离彗星約有多少公里？



(第 4 題)

5．自圓外一点向圓所引的切綫长为 20 厘米，而由这点所引的最长的割綫为 50 厘米，求这圓的半徑．（注意：最长的割綫，是指通过圓心的割綫．）

6．从两圓公共弦的延长綫上任取一点（参考 123 頁例 2 的图）作两圓的割綫，分别交两圓于 E, F 和 G, H．証明 E, F, G 和 H 四点在同一圓上．

7．証明：如果两圓相交，那末到两圓有相等切綫之长的点的軌迹，必在两圓公共弦所在的直綫上（参考 123 頁例 2）．

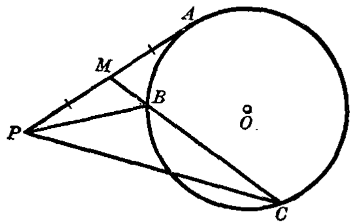
8．上題中，如果两圓是相切的（外切或內切），那么将有什么結論？对所得結論加以証明．

9．自圓內接四边形 $ABCD$ 的頂点 C，作对角綫 BD 的平行綫，交 AB 的延长綫于 E．証明 $BE\cdot AD=BC\cdot CD$．

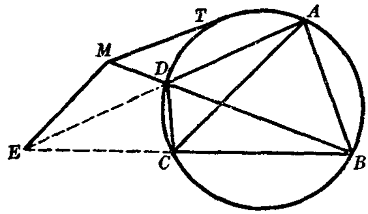
[提示：只要能够証明 $\triangle BCE \backsim \triangle DAC$ 就可以了.]

10. 如图. 自圓外一点 P 作直綫 PA 切圓 O 于 A, 过 PA 的中点 M 作割綫交圓 O 于 B 和 C. 求証 $\angle MPB=\angle MCP$.

[提示：可証明 $\triangle PMB \backsim \triangle CMP$.]



(第 10 題)



(第 11 題)

*11. 四边形 $ABCD$ 內接于圓，它的一双对边 AD 和 BC 相交于 E. 过 E 作 AC 的平行綫交 BD 于 M, 再从 M 作四边形 $ABCD$ 外接圓的切綫 MT, 如果 T 是切点, 証明 $MT=ME$.

[提示：按照已知条件, 显然 $MT^2=MB\cdot MD$, 如果再証明 $ME^2=MB\cdot MD$ 就可以了. 为此只要設法証明 $\triangle DEM \backsim \triangle EBM$.]

§2·7 关于圓內相交两弦的度量关系

圓內相交两弦被交点分成四条綫段，下面的定理指出这些綫段間的相互关系.

相交弦定理 經过圓內一点引两条弦，各弦被这点所分成的两綫段的积相等.

已知 过圓內一点 P 的两弦 AB 和 CD (图 2·30).

求証 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

【証】 連結 AC 和 BD. 在 $\triangle PAC$ 和 $\triangle PDB$ 中, $\because \angle APC$ 和 $\angle DPB$ 为对頂角, $\therefore \angle APC=\angle DPB$.

$\because \angle ACP$ 和 $\angle DBP$ 为对同弧的

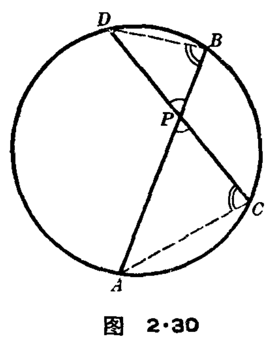


图 2·30

圓周角，∴ $\angle ACP=\angle DBP$.

∴ $\triangle PAC \backsim \triangle PDB$. 从而 $\dfrac{PA}{PD}=\dfrac{PC}{PB}$,

即 $$PA\cdot PB=PC\cdot PD.$$

例 1. APB 和 CPD 是圓 O 內經过点 P 的两条弦，它們和圓各交于 A, B 和 C, D. 已知 $PA=PB=4$, $PC=\dfrac{1}{4}PD$. 求 CD(图 2·31).

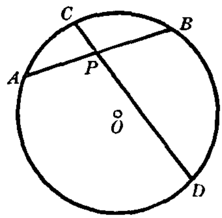


图 2·31

【解】 設 $CD=x$，那末 $PD=\dfrac{4}{5}x$, $CP=\dfrac{1}{5}x$. 依据相交弦定理，$PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

即 $$4\times 4=\frac{1}{5}x\cdot\frac{4}{5}x,\quad x=10.$$

答：$CD=10$.

例 2. 綫段 AB 和 CD 相交于点 P，并且 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$，那末 A, B, C, D 四点共圓.

已知 綫段 AB, CD 交于点 P，并且 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$ (图 2·32).

求証 A, B, C, D 四点共圓.

分析 要証 A, B, C, D 四点共圓，只要証明 C, B 两点在綫段 AD 的同一側，并且对 AD 所張的視角 $\angle ACD$ 和 $\angle DBA$ 相等. 为此，連結 AC, BD. 只要能証 $\triangle APC \backsim \triangle DPB$，那末就有 $\angle ACD$ 和 $\angle DBA$ 相等.

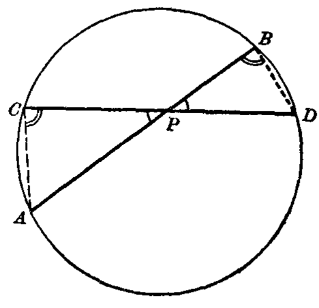


图 2·32

【証】 連結 AC, BD. 在 $\triangle APC$ 和 $\triangle DPB$ 中，∵ $\angle APC$ 和 $\angle DPB$ 为对頂角，

$$\therefore\ \angle APC=\angle DPB.$$

等式 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$ 可以变形为 $\dfrac{PA}{PD}=\dfrac{PC}{PB}$.

依据三角形相似判定定理3，$\triangle APC \backsim \triangle DPB$. 从而 $\angle ACD$

$=\angle DBA$. $\angle ACD$ 和 $\angle DBA$ 可以看做 C 和 B 对綫段 AD 的两个視角，并且 C, B 在 AD 的同側，因此 A, B, C, D 四点共圓.

注意 請讀者体会例2和相交弦定理的关系.

例3. 在图 2·33 中，点 P 为弦 AB 上的任意点. 連結 P 和圓心 O. 引 $PC\perp OP$, PC 交圓于 C. 求証:

$$PA\cdot PB=PC^2.$$

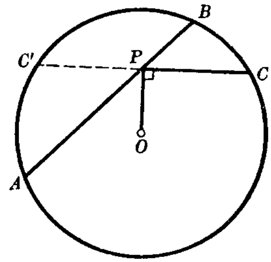


图 2·33

【証】 延长 CP, 交圓于 C'.

$\because OP\perp CC'$, $\therefore PC=PC'$.

由相交弦定理，

$$PA\cdot PB=PC\cdot PC'=PC^2.$$

习 題 2·7

1. 两弦相交，一弦被分为 12 厘米和 18 厘米两段，另一弦被分为 3:8, 求另一弦的长.

[略解: 設另一弦被分成的两段之长为 $x$cm 和 $y$cm, 由已知条件和本节相交弦定理，得方程組:

$$\begin{cases} x\cdot y=12\times 18, \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

解这个方程組，得 $x=9$, $y=24$.

$\therefore$ 另一弦的长为 $9\text{ cm}+24\text{ cm}=33\text{ cm}$.

注意: 也可以設另一弦被分成的两段之长为 $3x$cm 和 $8x$cm, 可得方程 $3x\cdot 8x=12\times 18$, 由此解出 x 来，再求 $3x+8x$ 即得. 或者，假定另一弦的长是 $x$cm, 那么被分成的两段之长是 $\frac{3}{11}x$cm 与 $\frac{8}{11}x$cm, 这样就得到另一形式的方程: $\frac{8}{11}x\cdot\frac{3}{11}x=12\times 18$, 由此可以直接求出所要求的結果.]

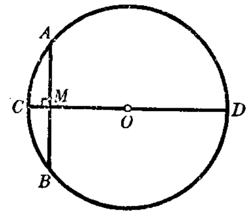
2. 两弦相交，一弦被分为 12 厘米和 16 厘米的两段，而另一弦的全长为 32 厘米. 求另一弦被交点所分成的两段的长.

3. 两弦相交，一弦被分为 48 厘米和 3 厘米的两段，而另一弦被等分. 求另一弦的长.

4. 我国古算书“九章算术”里，有“圆材埋壁”一题，內容是：今有圆材，埋在壁中，不知大小．以鋸鋸之，深一寸，鋸道长一尺．問徑几何？

［已知：如图．圆 O 是圆材的横断面，CD 是直徑．CM 长 1 寸，它表示鋸深．AB 长 1 尺，它表示鋸道．

求圆材直徑 CD 之长．



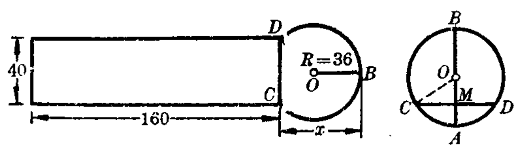
(第 4 題)

略解：按照題意，在圆 O 中，弦 AB 垂直直徑 CD 于 M．由 § 2·7 的例 3 可知，$MA^2=MC\cdot MD$．那么 $CD=CM+MD=CM+\frac{MA^2}{CM}$．代入已知的长度后可得 $CD=1$ 寸 $+\frac{5^2}{1}$ 寸 $=26$ 寸．

答：圆材的直徑是 2 尺 6 寸．］

5. 有一直徑为 40 毫米的軸，一头为平面，另一头为圆头，圆半徑为 36 毫米．全軸除圆头部分外，长为 160 毫米．求这軸的全长．

［解：如图 (1) 是軸的纵断面图，图 (2) 是圆头部分的图形．其中弦 $CD=40\,\text{mm}$，直徑 $AB=72\,\text{mm}$，且 $AB\perp CD$ 于 M．那么 BM 就是圆头部分的长．



(1)　　(2)

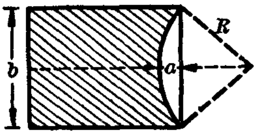
(第 5 題)

設 $BM=x\,\text{mm}$．由 § 2·7 可知，$\left(\frac{CD}{2}\right)^2=AM\cdot MB=(AB-MB)\,MB$，由此得：$20^2=(72-x)x$，即 $x^2-72x+400=0$．解这个方程，即得 $x=36\pm29.9$，$\therefore x_1=65.9$，$x_2=6.1$．因此軸的全长可能是 $160+65.9\approx226$；或是 $160+6.1\approx166$．

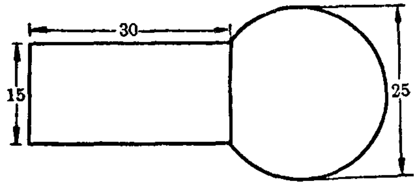
答：全軸的长是 226 毫米或 166 毫米．

注意：这一类問題，也可以用勾股定理去計算，但不要忽略可能有两个解．］

6. 一个玻璃鏡头的尺寸如图所示．求用 b 和 R 表示 a 的长，其中 R 是鏡头曲面的半徑．



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图所示的一个推杆头．圓球的直徑是 25 毫米，軸的直徑是 15 毫米，长 30 毫米，求推杆头的总长．

8. 設 P 是圓 O 外的点，直綫 PA, PB 切圓 O 于 A, B，联結 AB, OP，它們相交于点 M．再过 M 作一弦 CD，証明 $\angle CPO=\angle CDO$．

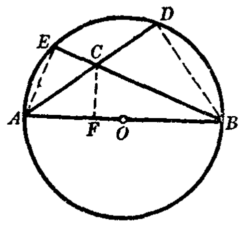
［提示：(1) 利用比例綫段的等式

$$AM\cdot MB=OM\cdot MP,\quad AM\cdot MB=CM\cdot MD.$$

(2) 証明 O, C, P 与 D 四点在同一圓上．］

9. 自半圓的直徑 AB 的两端引两弦 AD 和 BE，相交于圓内点 C．求証 $AC\cdot AD+BC\cdot BE=AB^2$．

［提示：如图．F 为 C 在 AB 上的射影，利用 C, E, A 和 F 四点共圓的关系，由 §2·6 定理可得到一組等式．同理，由 B, D, C, F 四点共圓还可得到另一組等式，再把它們相加后即可得証．］



（第 9 题）

*10. 过 $\triangle ABC$ 的重心 G 及頂点 A 作圓与 BG 相切于点 G．再延长 CG，交这圓于 D．証明 $AG^2=GC\cdot GD$．

［提示：先过 C 作 BG 的平行綫，交 AG 的延长綫于 F．从已知条件出发，看 AG 与 GF 是否相等？然后再証 A, D, F 和 C 四点是在同一圓上的，利用这些关系寻出要証明的关系式．］

代数作图法

§2·8 代数作图法的基本作图題

在我們已經学过的作图題中，有不少作图題是，已知条件是綫段 a, b, c, …，求作的图形是一条綫段 x，它要滿足如下关系式中之一：

(1) $x=a+b$;

(2) $x=a-b \quad (a>b)$;

(3) $x=ma$ (m 为一正整数);

(4) $x=\frac{1}{m}a$ (m 为一正整数);

(5) $a:b=c:x, x=\frac{bc}{a}$;

(6) $a:x=x:b, x=\sqrt{ab}$;

(7) $x=\sqrt{a^2+b^2}$;

(8) $x=\sqrt{a^2-b^2} \quad (a>b)$.

根据这八个等式,我們可以看出,这一类作图题的共同的特点是: 每个作图题的求作图形都是一条綫段, 每一条求作綫段都可以已知綫段的代数式来表达,对应于不同的代数式,就应用不同的作法来作綫段 x. 因此解这一类作图题的方法叫**代数作图法**. 在应用代数作图法解的作图题里,前面的八个作图是最簡单的,也是最基本的.

下面的一些例题都是用代数作图法解的作图題, 它們要比前面的八个作图題复杂一些. 但是把这些作图題分析到最后, 它們的解法总不外是这八个作图方法的有限次的反复应用.

例 1. 已知綫段 a 和 b. 求作綫段 x, 使 $x=\frac{3ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (图 2·34).

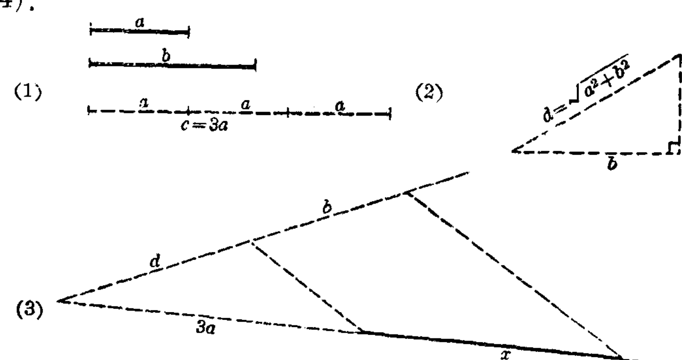


图 2·34

分析 在等式 $x=\dfrac{3ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 里，設 $c=3a$，$d=\sqrt{a^2+b^2}$，那末 $x=\dfrac{c\cdot b}{d}$. 由作图題 (3)，綫段 $c=3a$ 可作(图 2·34(1)). 由作图題 (7)，綫段 $d=\sqrt{a^2+b^2}$ 可作 (图 2·34(2)). 由作图題 (5)，綫段 $x=\dfrac{c\cdot b}{d}$ 也是可作的(图 2·34(3)).

請讀者詳細观察图 2·34，然后自己完成这个作图題的作法和証明.

例 2. 已知两綫段 a 和 b ($a>b$). 現要求作綫段 x，使 $x=\sqrt{(a+b)\sqrt{a^2-b^2}}$ (图 2·35).

分析 在等式 $x=\sqrt{(a+b)\sqrt{a^2-b^2}}$ 里，設 $c=a+b$，$d=\sqrt{a^2-b^2}$. 那末 $x=\sqrt{c\cdot d}$.

由作图題(1)，綫段 $c=a+b$ 是可作的(图 2·35(1)). 由作图題(8)，綫段 $d=\sqrt{a^2-b^2}$ 是可作的(图 2·35(2)). 由作图題(6)，綫段 $x=\sqrt{c\cdot d}$ 也是可作的(图 2·35(3)).

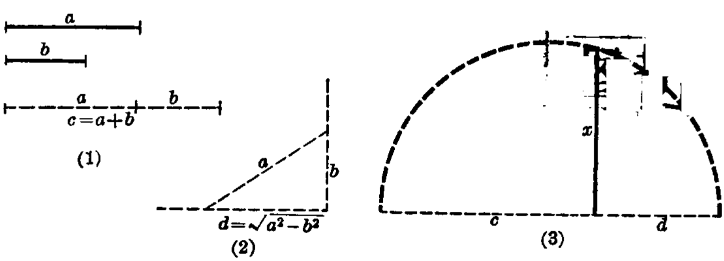


图 2·35

請讀者詳細观察图 2·35，然后自己完成这个作图題的作法和証明.

例 3. 已知綫段 AB，把 AB 分成两部分，使較大部分为全綫段和較小部分的比例中項(图 2·36).

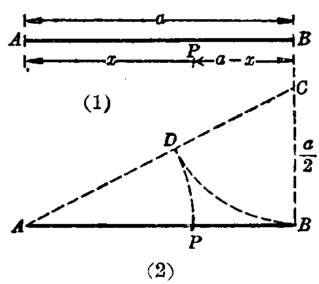


图 2·36

分析 設 $AB=a$，点 P 为所求的分点. 若較大部分 $AP=x$，则較小部分 $PB=a-x$ (图 2·36(1)). 按題意

有等式 $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$，即 $x^2+ax-a^2=0$. 解这个方程得

$$x=\pm\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}. \text{ 去負根，} x=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}.$$

由作图題(7)，綫段 $\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$ 是可作的. 再由作图題(2)，綫段 $x=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}$ 也是可作的.

【作法】 过点 B，引 $BC\perp AB$，且使 $BC=\frac{1}{2}a$（图 2·36(2)）. 連結 AC. 在 AC 上取点 D，使 $CD=\frac{1}{2}a$. 在 AB 上取点 P，使 $AP=AD$. 则点 P 为所求的点.

【証】 $\because$ 直角三角形 ABC 的直角边为 a 和 $\frac{1}{2}a$，

$$\therefore\quad AC=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

$$\because\quad CD=\frac{1}{2}a,$$

$$\therefore\quad AD=AP=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}.$$

$$\because\quad \frac{AB}{AP}=\frac{a}{\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{a\left(\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{a}{2}\right)}{\left(\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}\right)\left(\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{a}{2}\right)}$$

$$=\frac{a\left(\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{a}{2}\right)}{a^2}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1).$$

$$\frac{AP}{PB}=\frac{\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}}{a-\left(\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}}{\frac{3a}{2}-\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{3a}{2}+\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)}{\left(\frac{3a}{2}-\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)\left(\frac{3a}{2}+\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)}$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{a^2}{2}}{a^2}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1).$$

$$\therefore\quad \frac{AB}{AP}=\frac{AP}{PB}.$$

把一条綫段分成长短不同的两个部分，使較长的部分是全綫段和較短部分的比例中項，这样的作图題是十分重要的，后面我們还要应用到它．这个作图題通常叫做**分綫段成中外比**，或者叫做**黃金分割**．

习　題　2·8

1．已知綫段 a, b, c 和 d, 求作綫段 x, 使:

(1) $x=\sqrt{5ac}$;　(2) $x=3\sqrt{bd}$;　(3) $x=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

(4) $x=\sqrt{a^2-b^2-d^2}$;　(5) $x^2=a^2+b^2-c^2$.

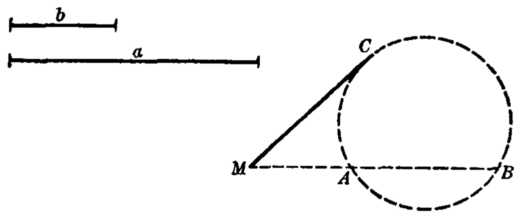
2．下列方程中 x, y 是未知量，試用作图方法来解:

$$\begin{cases}x+y=a,\\x-y=d.\end{cases}$$

3．已知两綫段 a 与 b, 且 $a>b$．求作綫段 x, 使 $x^2=ab$　試証明下列作

法的正确性.

作法：作綫段 $MB=a$. 在 MB 上取一点 A，使 $MA=b$. 过 A 与 B 两点任意作一个圆，再由 M 作切綫 MC 切圆于 C. 綫段 MC 就是所求作的.



(第3题)

4. 已知两綫段的和为 a，它們的比为 $3:2$. 求作这两綫段.

[提示：据题意可列联立方程 $\begin{cases} x+y=a, \\ x:y=3:2. \end{cases}$ 解之可得 $\dfrac{a-y}{y}=\dfrac{3}{2}$，因此 $\dfrac{a}{y}=\dfrac{5}{2}$.]

5. 已知两綫段的差为 d，它們的比为 $a:b$. 求作这两綫段.

6. 已知綫段 a, b, c 和 d，求作綫段 x，使：

(1) $x=\sqrt{ab+cd}$;　　(2) $x=a\sqrt{\dfrac{b}{c}}$;

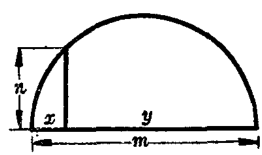
(3) $x=\sqrt{2a^2+bc}$;　[提示：設 $y^2=2a^2$, $z^2=bc$，那末 $x=\sqrt{y^2+z^2}$.]

(4) $x=\dfrac{bc\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}$. [提示：設 $y=\sqrt{a^2-b^2}$, $z=\dfrac{c}{a}y$，那末 $x=\dfrac{b}{a}z$，其中 $a>b$.]

*7. 已知 m 和 n 是两条綫段的长，試用作图方法解方程組：

$$\begin{cases} x+y=m, \\ xy=n^2. \end{cases}$$

[提示：如图. 图中 $n<\dfrac{m}{2}$.]



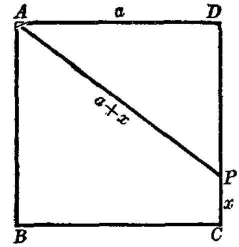
(第7题)

8. 已知两綫段的和(或差)为 a，它們的比为 $m:n$，求作这两綫段.

9. 在已知圆的已知直徑的延长綫上求一点，使由这点向圆所作的切綫等于过圆心的割綫的一半.

10. 在正方形 $ABCD$ 的 CD 边上求作一点 P，使 $BC+CP=AP$.

[分析：設已知正方形的边长为 a, CD 边上的点 P 适合条件 $BC+CP=AP$. 那末，在直角三角形 ADP 中：$AP^2=AD^2+DP^2$. 如果設 $PC=x$，則 $DP=a-x$, $AP=a+x$. 所以得方程 $(a+x)^2=(a-x)^2+a^2$, $x=\frac{a}{4}$. 于是点 P 可作.]



(第 10 題)

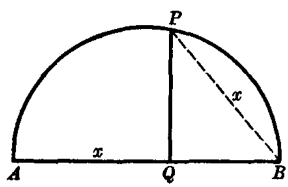
11. 已知矩形的一边 $AB=a$. 截去正方形 $AEFD$ 后，所得矩形 $EBCF$ 和原矩形相似. 求作原矩形的另一边 BC.

12. 在正方形 $ABCD$ 中,求作一內接正方形,使它的边等于定綫段 b.

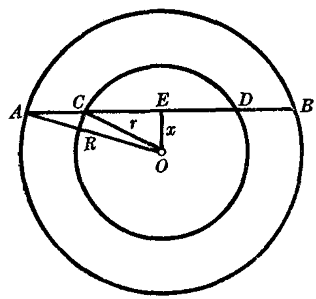
13. 已知圓外一点 A,連接 A 和圓心 O. 試在 AO 上作出一点 P，使从点 P 向圓所作的切綫 $PT=PA$.

*14. 在直徑为 AB 的半圓上求作一点 P，使从点 P 向 AB 所引的垂綫足 Q 在 AB 上截得 $AQ=BP$.

[提示：如图. 設 $AQ=BP=x$, $AB=a$ (定长). 显然 $BP^2=AB\cdot BQ$, $\therefore x^2=a(a-x)$. 那么由 § 2·8 例 3 可知，分綫段 AB 成中外比就可求得 x，于是点 Q 可以作出.]



(第 14 題)



(第 15 題)

15. 已知两个同心圓，求作一直綫和两圓相交. 使大圓截得的弦等于小圓截得的弦的两倍.

[分析：假設直綫已經作出,它交大圓于 A, B，交小圓于 C, D. 过圓心 O 作 $OE\perp AB$,垂足是 E,那末 $AE=\frac{1}{2}AB$, $CE=\frac{1}{2}CD$. 由于 $AB=2CD$, $\therefore AE=2CE$. 再連接 OC, OA, 則 $OC=r$, $OA=R$. 設 $OE=x$, 那么 $AE=\sqrt{R^2-x^2}$, $CE=\sqrt{r^2-x^2}$. 于是得到 $\sqrt{R^2-x^2}=2\sqrt{r^2-x^2}$；解此方程

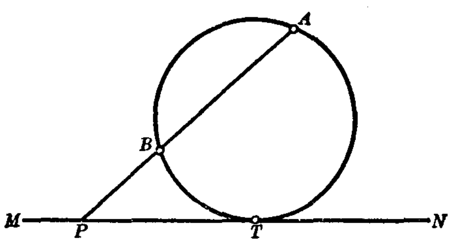
得 $x=\sqrt{\frac{1}{3}(4r^2-R^2)}=\sqrt{\frac{1}{3}(2r+R)(2r-R)}$. 这样，只要求出 $\frac{1}{3}(2r+R)$ 和 $(2r-R)$ 的比例中項就可以了. 由此可以作出所要求的直綫.]

16. 在已知圓直徑的延长綫上求一点，使自这一点向圓所引的切綫等于圓的直徑.

[提示：設圓的直徑 AB 延长綫上一点 P，向圓所引的切綫长等于 AB，那末 $AB^2=(AB+BP)PB$，就是 $4R^2=(2R+BP)BP$，由此可定点 P.]

17. 求作一圓，使通过两定点 A 和 B，并与一条已知直綫 MN 相切.

[提示：如图. 連 AB 并延长交 MN 于 P，利用切綫割綫定理确定点 T.]



(第 17 題)

本章提要

1. 概念 度量关系，点和綫段在一直綫上的正射影，代数作图法的基本作图題.

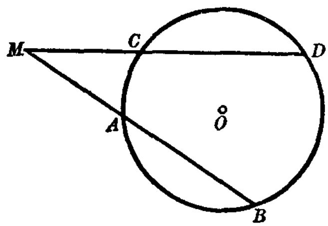
2. 图形的性质 直角三角形中成比例綫段定理，勾股定理，勾股定理的推广，平行四边形的对角綫和边的度量关系，已知三角形三边求它的中綫、高、外接圓半徑和角平分綫的公式，由圓外一点所引的切綫和割綫的度量关系以及圓內相交弦定理.

3. 图形的判定 勾股定理的逆定理.

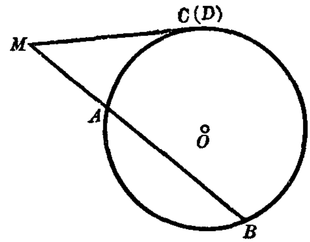
4. 作图 作两綫段的比例中項，用代数法解作图題.

5. 計算 直角三角形中的直角边 a, b 在斜边 c 上的射影为 p 与 q，斜边上的高为 h. 它們之間，一般已知了两个就可以計算出其他的元素.

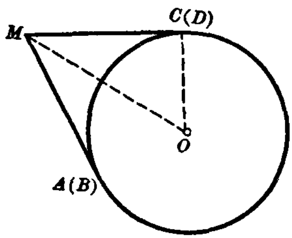
在与圓有关的一些綫段間，求某些綫段的长如下图：



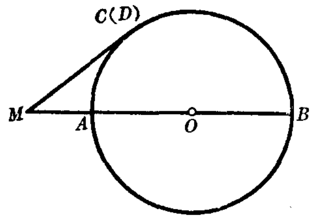
(1)



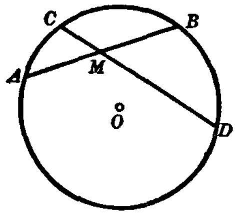
(2)



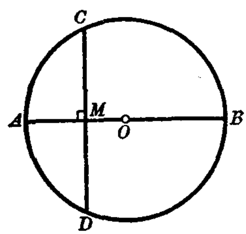
(3)



(4)



(5)



(6)

例如在(4)中，MC、MA 与半徑 R 中，已知其中两綫段就可以計算出另一綫段，在(6)中直徑 AB，弦 CD 以及 AM(或 BM)中，知道其中两綫段，也就可以計算出另一綫段.

复 习 题 二

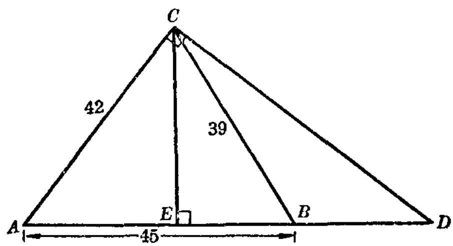
1. 过平行四边形 $ABCD$ 对角綫的交点，引垂直于 BC 的直綫，交 BC 于 M. 再延长这垂綫，使之和 CD 相交于 N. 如果 $CD=a$, $BC=b$, $CN=c$. 求 CM. (注意：$\angle A$ 可能是銳角也可能是鈍角.)

2. 在直角三角形中，高 h 分斜边为两綫段，这两綫段的差为 3 厘米，如

果高 h 为 2 厘米. 試求此两綫段之长.

*3. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $BC=39\text{cm}$, $CA=42\text{cm}$, $AB=45\text{cm}$. 从 C 作 CA 的垂綫,交 AB 的延长綫于 D. 求 BD 及 CD 之长.

[解: 在 $\triangle ABC$ 中,根据已知条件, BC 是最短边,可知 $\angle A$ 是銳角. 由 C 作 $CE\perp AB$, 交 AB 于 E, 那末由勾股定理的推广, 可得 $BC^2=AC^2+AB^2-2AB\cdot AE$. 代入已知的数值,即有 $39^2=42^2+45^2-2\cdot45\cdot AE$, $\therefore AE=25.2$. 在直角三角形 ADC 中,因为 AE 是 AC 在斜边 AD 上的射影, $\therefore AC^2=AE\cdot AD$. 即 $42^2=25.2\cdot AD$. 那末, $AD=\dfrac{42^2}{25.2}=70$. 于是 $BD=AD-AB=70-45=25(\text{cm})$; $CD=\sqrt{AD^2-AC^2}=\sqrt{70^2-42^2}=56(\text{cm})$.]



(第 3 題)

4. 直角梯形两底的差为 30 厘米,梯形的斜边等于 50 厘米,且最大对角綫等于 60 厘米. 求梯形的两底.

5. 直角三角形的两直角边为 13 分米和 84 分米, 求它的內切圓半徑.

6. 在等边三角形中,边比高要长 26.8 毫米,求边长.

7. 在半徑为 5 分米的圓內,內接一等腰三角形. 它的底和圓心相距 4 分米,求这个三角形的腰.

[提示: 要考虑两种可能情形.]

8. 三角形的大边和中边,及中边与小边的差都是 1, 并且大边在中边上的射影为 9 厘米. 求三边的长.

9. 两相交圓的半徑分别等于 3 分米和 4 分米, 如果这两个圓的公共弦等于 48 厘米,求它們圓心間的距离.

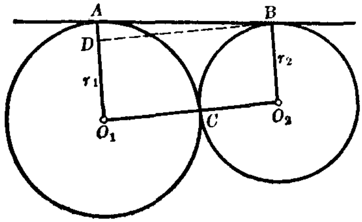
[提示: 要考虑两种可能情形.]

10. 三角形的边分别为 45 米, 42 米和 39 米. 求长为 42 米的和 39 米的边在 45 米的边上的射影.

11. 已知三角形的三边分别等于 $4.5l$, $6l$ 和 $7.5l$, l 是一个定长的綫段.

試確定这个三角形是否直角三角形，然后把它三边上的高用 l 表示出来.

12. 半徑为 r_1 和 r_2 的两个已知圓外切于 C，外公切綫 AB 分别切圓 O_1 于 A，切圓 O_2 于 B. 求綫段 AB 的长.



(第 12 題)

[解：假設 $r_1>r_2$，如图. 由 B 作 $BD\parallel O_1O_2$、交 O_1A 于 D，因为 $\triangle ABD$ 是直角三角形，由勾股定理得 $AB=\sqrt{BD^2-AD^2}$，但是

$$BD=O_1O_2=r_1+r_2,\quad AD=O_1A-O_1D=O_1A-O_2B=r_1-r_2,$$

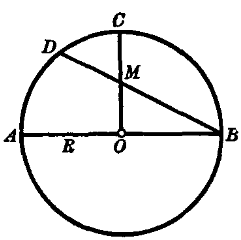
因此 $$AB=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_1r_2}.]$$

13. 两圓的圓心距为 65 分米，它們的外公切綫长 63 分米，內公切綫长 25 分米. 求这两圓的半徑.

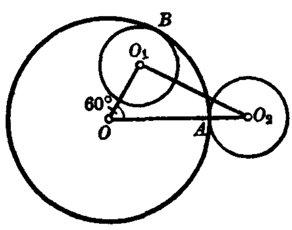
[提示：从圓心作公切綫的平行綫，設法从勾股定理先求出二半徑的和与差.]

14. 直角三角形的两条直角边各为 75 分米和 100 分米. 斜边被高分成两綫段，以这两綫段为直徑作两圓，求两直角边分别为两圓所截綫段的长.

15. 已知圓的半徑是 R，过直徑 AB 的一端 B 和与这直徑垂直的半徑 OC 的中点 M 作一弦 BD，求这弦的长.



(第 15 題)



(第 16 題)

16. 一个大圓 O 分别和两个相等的小圓 O_1, O_2 相切，一是內切，一是外切(如图). 两切点間的弧 AB 为 60°，大圓的半徑是 R，小圓的半徑是 r，求两个小圓的圓心間距离 O_1O_2.

[提示：如图. 从 $\triangle OO_1O_2$ 去求 O_1O_2 的长.]

17. 从距圓心为 13 厘米的点，向半徑为 5 厘米的这个圓引割綫，此割綫

恰被圆周所平分．求这割綫的长．

18．已知平行四边形两条邻边的长各为 a 厘米和 b 厘米，一角为 $60°$．求两条对角綫的长．

19．AB 为圆的直徑，BC 为这圆的切綫，D 为 AC 和圆的交点．已知 $AD=32\text{cm}$, $DC=18\text{cm}$．求圆的半徑．

20．从圆外一点向圆引切綫和割綫，割綫的长为 a，它的圆内部分减去圆外部分的差等于切綫的长．求这切綫的长．

21．从直角三角形 ABC 的直角边 BC 的中点 M 到斜边 AB 作垂綫 MN，N 是垂足．求証 $AN^2-BN^2=AC^2$．

[提示：$AN^2-BN^2=(AN+BN)(AN-BN)$．]

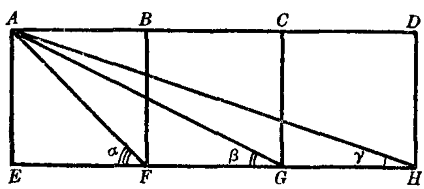
22．在等腰三角形的底 AC 上任取一点 M，証明 $BC^2-BM^2=AM\cdot MC$．

[提示：$BC^2=BD^2+\frac{1}{4}AC^2$, $BM^2=BD^2+MD^2$；二式相减，并把 MD 以 $\frac{1}{2}AC-AM$ 加以代换．这里 D 是 AC 中点，M 在 AD 上．]

23．过三角形 ABC 的 BC 边上的一点 P，作 CA, BA 的平行綫，分别交 AB 于 Q，交 CA 于 R．証明 $PQ\cdot PR=BQ\cdot CR$．

24．有三个并列的正方形(如图)．証明 $\alpha+\beta+\gamma=90°$．

[提示：証明 $\triangle AFG\backsim\triangle HFA$．]



(第 24 题)

25．設圆 O 的直徑垂直弦 MN 于点 A，弦 BC 与 MN 相交于 D．証明 $AD^2+BD\cdot CD$ 的值与点 D 的位置沒有关系．

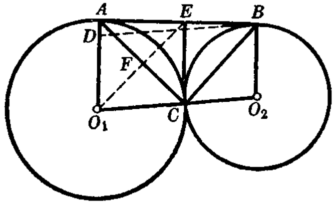
[提示：不論点 D 的位置怎样，只要能証明 $AD^2+BD\cdot CD$ 总是等于 AN^2 就可以了．]

26．一直角三角形 ABC 內接于半圆內(它的斜边与直徑重合)．从直徑上一点 D 作直徑的垂綫，分别与一直角边、半圆及另一直角边的延长綫相交于 E, F 和 G．証明綫段 DF 是綫段 DE, DG 的比例中項．

[提示：設 DF 交 BC 的延长綫于 G，証明 $\triangle ADE\backsim\triangle GDB$．]

27．在12题中，試計算$\triangle ABC$各边的长.

［提示：設公切綫CE交AB于E，可知$AE=\frac{1}{2}AB$．再証$\triangle O_1AF\backsim\triangle O_1EC$，从而求得$AF$，$AC=2AF$．$BC$同理可求.］



（第27题）

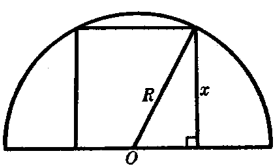
28．已知綫段a，b，c和d，求作綫段x，使：

(1) $x^2=2a^2$;　　(2) $x=(\sqrt{5}-\sqrt{3})a$;

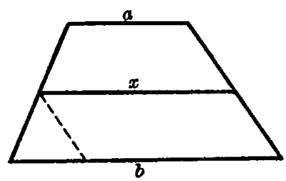
(3) $x=a\sqrt{\frac{b^2+c^2}{c^2-d^2}}$;　　(4) $x=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{c^2+d^2}}$.

29．試分别用位似法与代数法来解：作半圓的內接正方形.

30．求作一条直綫，平行于梯形的底，并且把这梯形分成两个相似梯形.



（第29题）



（第30题）

第三章　多边形的面积

我們已經学习过綫段的度量問題，現在要研究多边形面积的度量問題．这里首先介紹多边形面积的意义和处理多边形面积問題的一般方法，然后推导出关于某些常見的多边形的面积計算公式，最后再引入一些有关面积問題的作图題．

§3·1　多边形的面积

一个多边形所包圍的平面部分的大小叫做这个多边形的面积．

以前我們学习过：如果一个多边形迭合到另一个多边形上，它們能够处处重合，那末这两个多边形全等．从迭合两个全等多边形的过程中，我們很容易領会到两个全等多边形包圍同样大小的平面部分，因此它們的面积相等．面积相等的多边形叫**等积形**．全等多边形显然是等积的，但是等积形不一定是全等形．

为了确定某一个多边形 P 的面积，我們首先选定另一个多边形 U 作为面积单位，然后把多边形 U，一个靠着一个地平鋪在多边形 P 里，找出多边形 P 所包圍的平面部分是多边形 U 所包圍的平面部分的多少倍．例如，被度量的多边形 P 是矩形 $ABCD$，作为面积单位的多边形 U 是

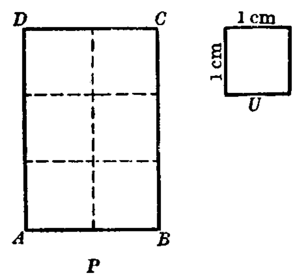


图 3·1

每边为 1 厘米的正方形（图 3·1）．現在把多边形 U，一个靠着一

个地平鋪在矩形 $ABCD$ 里，发现矩形 $ABCD$ 所包圍的平面部分正好是正方形 U 所包圍的平面部分的 6 倍．如果把正方形 U 的面积叫做一个平方厘米 (cm^2)，那末矩形 $ABCD$ 的面积就是 6 平方厘米，并且可以記作

$$矩形\ ABCD\ 的面积=6\,cm^2.$$

但是，一般多边形的形状不能都象矩形的形状这样的有規則，用正方形的面积单位去度量一般多边形实际上是有困难的．例如在图 3·2 里，用平方厘米去度量五边形 $ABCDE$ 的面积时，我們很难得出精确的結果．因此关于多边形的面积度量問題，我們采用間接的方法：先用长度单位去測定一个多边形的某些綫段的长度，然后以这些綫段的长度作数据，經过一定的計算，才得到这个多边形的面积．

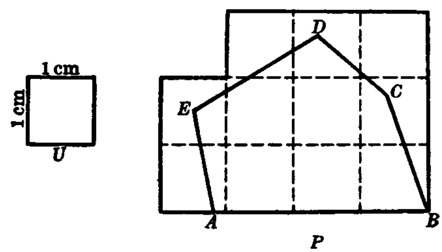


图 3·2

在推导某些多边形的面积計算公式时，我們常常割去一个多边形的一部分，把割下的部分改变了位置，再把它拼湊在原有多边形的剩余部分上．象在图 3·3 里，我們在四边形 $ABCD$ 的左边，割去一个三角形 I (图 3·3(1))，然后把三角形 I 搬到四边形 $ABCD$ 的右边去 (图 3·3(2) 和 (3))，把它拼湊在四边形 II 上，成为四边形 $EE'D'D$ (图 3·3(4))．这样处理图形的方法叫**面积割补法**．显然多边形經过割补之后，它的面积沒有改变，即經过割补后的多边形和原多边形是等积的．割补一个多边形的目的在于改变它的形状，使它成为一个面积度量問題已經解决的等积多边形，从而解决

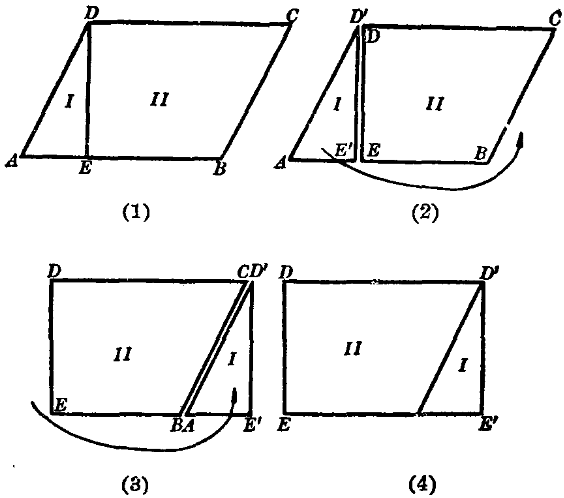


图 3·3

了度量原有多边形的面积問題.

在不同的情况下，我們选用不同的面积单位. 計算一頁紙的面积可用平方厘米；測定一間教室的面积可用平方米 (m^2)；表达一个国家的領土的面积可用平方公里 (km^2). **表达面积的数字后面一定要注明面积单位**，象 $16\,cm^2$. 如果只写 16，就不能确定这是 $16\,cm^2$ 还是 $16\,km^2$.

表达 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 等积时，应当写成

$$\triangle ABC\ \text{的面积} = \triangle A'B'C'\ \text{的面积}.$$

如果我們就写成 $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ 是不妥当的.

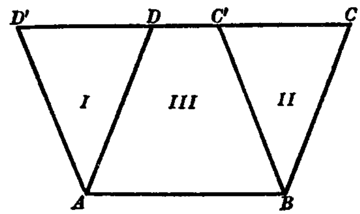
习 題 3·1

1. 試分别說明下列概念有什么区别：

(1) "全等图形"与"等积图形"；

(2) "长度单位"与"面积单位".

2. 已知图中的 $\square ABCD$ 与 $\square ABC'D'$ 有公共的底边，問它們是否等积？为什么？



(第2题)

§3·2 矩形的面积

在計算各种多边形的面积公式里，矩形的面积公式特别重要．因为其他多边形的面积公式都可由它直接地或者間接地推导出来．現在証明下面的定理．

矩形面积定理 矩形的面积等于它的底和高的积．

已知 矩形 $ABCD$，它的底边 $AB=b$，高 $AD=h$（图 3·4）．

求証 **矩形 $ABCD$ 的面积 $=bh$．**

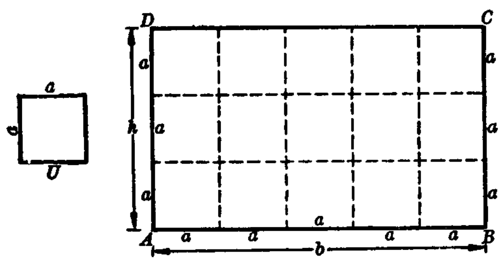


图 3·4

【証】 假設我們采用的长度单位为綫段 a，面积单位为每边等于 a 的正方形．現在用这个长度单位分别去度量矩形 $ABCD$ 的底边 AB 和高 AD，所得的量数各为 b 和 h．

(1) 如果 b 和 h 都是整数（为了具体起見，在图 3·4 中假定 $b=5$ 个长度单位，$h=3$ 个长度单位），那末我們可以将底 AB 分成 b 个等分，高 AD 分成 h 个等分，每个等分都等于綫段 a． 过 AB

的每一个分点引 BC 的平行綫，过 AD 的每一个分点引 AB 的平行綫.

这两組平行綫将矩形 $ABCD$ 分为若干个四边形. 容易証明这些四边形的每一条边都等于 a，每个角都是直角. 卽每一个四边形都是面积等于 1 个单位面积的正方形.

因为矩形的底边 AB 被分成 b 等分，所以过这些分点所作平行于 BC 的平行綫，把矩形 $ABCD$ 分为 b 个具有等底等高的长条矩形.

又因为矩形的高 AD 被分成 h 个等分，所以过这些分点所作平行于 AB 的平行綫，把每一个长条矩形分成 h 个面积等于单位面积的正方形.

可見矩形 $ABCD$ 一共分成 $b\times h$ 个面积等于单位面积的正方形，卽矩形 $ABCD$ 的面积 $=bh$（单位面积）.

(2) 如果 b 和 h 都是分数，我們将通过下面的具体例子来說明問題.

設 $b=5\frac{1}{2}$（单位长度），$h=3\frac{1}{5}$（单位长度）. 将这两个分数通分后得 $b=\frac{55}{10}$（单位长度），$h=\frac{32}{10}$（单位长度）.

我們改用 $\frac{1}{10}a$ 作长度单位，那末底 AB 可以分成 55 个等分，高 AD 可以分成 32 个等分，每个等分都等于綫段 a 的 $\frac{1}{10}$.

过 AB 的每一个分点引 BC 的平行綫，过 AD 的每一个分点引 AB 的平行綫.

用前面同样的方法，可以說明这两組平行綫将矩形 $ABCD$ 分成 55×32 个正方形，这些正方形的每一条边都等于 $\frac{a}{10}$.

但是每边等于 $\frac{a}{10}$ 的正方形的面积是每边等于 a 的正方形的

面积的 $\frac{1}{100}$[①]. 所以用原面积单位表示时,

$$
\begin{aligned}
\text{矩形 } ABCD \text{ 的面积} &= 55\times 32\times\frac{1}{100}\\
&= \frac{55}{10}\times\frac{32}{10}\\
&= 5\frac{1}{2}\times 3\frac{1}{5}\ (\text{单位面积}),
\end{aligned}
$$

即

$$\text{矩形 } ABCD \text{ 的面积} = bh(\text{单位面积}).$$

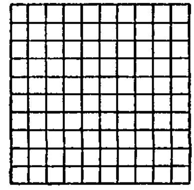
(3) 如果 b 和 h 是无理数,那末証明的过程比較复杂,我們通过下面的具体例子来説明:

設 $b=\sqrt{3}$ (单位长度), $h=\sqrt{2}$ (单位长度), 这里 $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{2}$ 都是无理数. 在无理数的实际运算里, 我們总是利用无理数的近似值来进行的. $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{2}$ 的各級精确度的近似值分别列表如下:

精确度		0.1	0.01	0.001	0.0001…………
$\sqrt{3}$ 的	不足近似值	1.7	1.73	1.732	1.7321…………
	过剩近似值	1.8	1.74	1.733	1.7322…………
$\sqrt{2}$ 的	不足近似值	1.4	1.41	1.414	1.4142…………
	过剩近似值	1.5	1.42	1.415	1.4143…………

在矩形 $ABCD$ 的底边 AB 和它的延长綫上,分别取点 B_1 和 B_2, 使 AB_1 和 AB_2 分别等于 $\sqrt{3}$ 的不足和过剩近似值, 它們的精确

① 这是因为, 将边长为 a 的正方形, 每边十等分, 并过分点作边的平行綫, 可以看出, 边长为 a 的正方形和 100 个边长为 $\frac{1}{10}a$ 的正方形的面积相等. 如附图.



度都是0.1. 即使 $AB_1=1.7$(单位长度), $AB_2=1.8$(单位长度)(图3·5).

再在矩形 $ABCD$ 的高 AD 和它的延长綫上,分别取点 D_1 和 D_2,使 AD_1 和 AD_2 分别等于 $\sqrt{2}$ 的不足和过剩近似值,它們的精确度都是0.1. 即使 $AD_1=1.4$(单位长度), $AD_2=1.5$(单位长度).

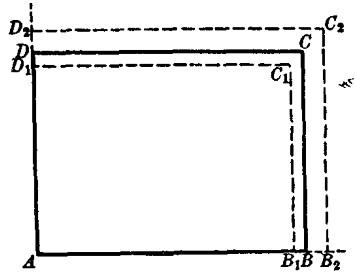


图 3·5

作矩形 $AB_1C_1D_1$ 和 $AB_2C_2D_2$.

这两个矩形的底边和高的长度都是有理数. 根据前面的(1),(2)两步論証,有

$$\text{矩形 } AB_1C_1D_1 \text{ 的面积}=1.7\times1.4(\text{单位面积}).$$

$$\text{矩形 } AB_2C_2D_2 \text{ 的面积}=1.8\times1.5(\text{单位面积}).$$

从图3·5里可以看出,矩形 $AB_1C_1D_1$ 的面积只是矩形 $ABCD$ 的面积的一部分, 矩形 $ABCD$ 的面积又只是矩形 $AB_2C_2D_2$ 的面积的一部分. 从而

$$\text{矩形 } AB_1C_1D_1 \text{ 的面积}<\text{矩形 } ABCD \text{ 的面积}$$
$$<\text{矩形 } AB_2C_2D_2 \text{ 的面积},$$

就是

$$1.7\times1.4(\text{单位面积})<\text{矩形 } ABCD \text{ 的面积}$$
$$<1.8\times1.5(\text{单位面积}) \tag{1}$$

用完全相同的方法,可以得到下面的不等式:

$$1.73\times1.41(\text{单位面积})<\text{矩形 } ABCD \text{ 的面积}$$
$$<1.74\times1.42(\text{单位面积}) \tag{2}$$

$$1.732\times1.414(\text{单位面积})<\text{矩形 } ABCD \text{ 的面积}$$
$$<1.733\times1.415(\text{单位面积}) \tag{3}$$

$$1.7321\times1.4142(\text{单位面积})<\text{矩形 } ABCD \text{ 的面积}$$
$$<1.7322\times1.4143(\text{单位面积}) \tag{4}$$

………………………………………………………

显然，这样的不等式可以无限地继續下去.

在代数里我們知道，无理数 $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{2}$ 的积就是求一个实数，它大于 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 的任意一組对应的不足近似值的积，而小于任意一組对应的过剩近似值的积. 如果我們把这个实数写成 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$，就有

$$1.7\times1.4<\sqrt{3}\times\sqrt{2}<1.8\times1.5 \tag{1'}$$

$$1.73\times1.41<\sqrt{3}\times\sqrt{2}<1.74\times1.42 \tag{2'}$$

$$1.732\times1.414<\sqrt{3}\times\sqrt{2}<1.733\times1.415 \tag{3'}$$

$$1.7321\times1.4142<\sqrt{3}\times\sqrt{2}<1.7322\times1.4143 \tag{4'}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

显然，这样的不等式可以无限地继續下去.

比較(1)，(2)，(3)，(4)，… 和(1′)，(2′)，(3′)，(4′)，… 諸式，可見矩形 $ABCD$ 的面积，在数值上与 $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{2}$ 的乘积完全一致，即

$$\text{矩形 } ABCD \text{ 的面积}=\sqrt{3}\times\sqrt{2}\,(\text{单位面积}),$$

或者

$$\text{矩形 } ABCD \text{ 的面积}=bh\,(\text{单位面积}).$$

推論 正方形的面积等于它一边的平方.

这里我們将复习一下长度单位和面积单位的关系. 从正方形面积的計算方法，我們容易理解：

(i) 如果长度单位是十进制的，那末和它們对应的面积单位是百进制的. 例如 1 尺＝10 寸，那末，1 平方尺＝100 平方寸；$1\,\mathrm{dm}=10\,\mathrm{cm}$，那末，$1\,\mathrm{dm}^2=100\,\mathrm{cm}^2$.

(ii) 如果两种不同的长度单位的换算因数为 k，那末和它們对应的面积单位的换算因数为 k^2. 例如 $1\,\mathrm{m}=3$ 市尺(这里 $k=3$)，那末 $1\,\mathrm{m}^2=9$ 平方尺(这里 $k^2=9$).

我国耕地的面积用亩作单位，1 亩＝60 平方丈. 国外耕地用公亩作单位，1 公亩＝$100\,\mathrm{m}^2$.

例 1. 一亩等于多少公亩?

【解】 1 亩 $=60$ 平方丈

$$=6000\text{ 平方尺}\quad(\because\ 1\text{ 平方丈}=100\text{ 平方尺})$$

$$=\frac{6000}{9}\mathrm{m}^2\quad(\because\ 1\mathrm{m}^2=9\text{平方尺})$$

$$=\frac{6000}{9\times100}\text{ 公亩}\quad(\because\ 1\text{ 公亩}=100\mathrm{m}^2).$$

答: 1 亩 $=6\frac{2}{3}$ 公亩.

例 2. 在比例尺为 1:10000000 的平面图上, 1 平方厘米代表的眞正面积是多少?

【解】 在这幅平面图上, 1 厘米代表 10000000 厘米的眞正长度, 就是 1 厘米代表 100 公里. 因此, 图上 1 平方厘米代表的眞正面积为 10000 平方公里.

例 3. 矩形的面积为 $144\mathrm{m}^2$, 底和高的比为 9:4, 求底和高.

【解】 設矩形的底和高分别为 $9x$ m 和 $4x$ m. 根据矩形面积公式有 $9x\cdot4x=144$, $x^2=4$, $x=2$.

$\therefore$ 底 $=9x=18(\mathrm{m})$, 高 $=4x=8(\mathrm{m})$.

答: 矩形的底和高分别为 18 米和 8 米.

例 4. 矩形土地的面积为 400 公頃, 长为 8 公里, 求这块土地的周长(1 公頃 $=100$ 公亩).

【解】 1 公頃 $=100$ 公亩

$$=10000\mathrm{m}^2\quad(\because\ 1\text{ 公亩}=100\mathrm{m}^2)$$

$$=\frac{1}{100}\mathrm{km}^2\quad(\because\ 1\mathrm{km}^2=1000000\mathrm{m}^2).$$

$$\therefore\quad 400\text{ 公頃}=400\times\frac{1}{100}$$

$$=4\mathrm{km}^2.$$

設矩形土地的寬为 x km, 根据矩形面积公式, 有

$$8x=4,\quad x=\frac{1}{2}\,(\mathrm{km}).$$

矩形的周长$=2\left(8+\frac{1}{2}\right)=17\,(\mathrm{km})$.

答：矩形的周长为 17 公里.

习 題 3·2

1. 說明什么是多边形的面积？什么是面积的单位？

2. 通过計算，回答下列問題：(1) 正方形的各边为原来的 3 倍或 $\frac{2}{3}$ 时，它的面积变化怎样？(2) 怎样变动正方形的各边，使面积为原正方形面积的 4 倍或 $\frac{1}{25}$.

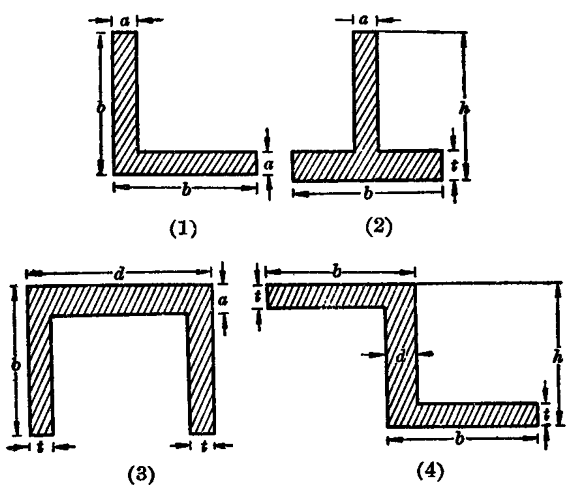
3. 一厂房的地基长为 82.5 米，寬 26.5 米. 求这厂房所占土地的面积.

4. 已知矩形地面的面积为 15 亩，它的两条邻边的比为 5:2，它的周长是多少丈？

5. 已知正方形的对角綫的长为 l 米，求它的面积.

6. 已知矩形的面积为 4800 平方厘米，对角綫的长为 1 米，求这个矩形的周长.

7. 已知一块矩形的土地的面积是 18 公亩，寬是 24 米. 問长是几米？



(第 9 題)

8. 有两块田，一是矩形，一是正方形，它們的面积相等．已知矩形长 45 丈，寬 18 丈．求正方形田每边的长．

9. 設想用一个平面来切截物体，物体上被平面切到的部分叫作截面，用画有斜細綫的阴影来表示．試計算附图中各种截面的面积．

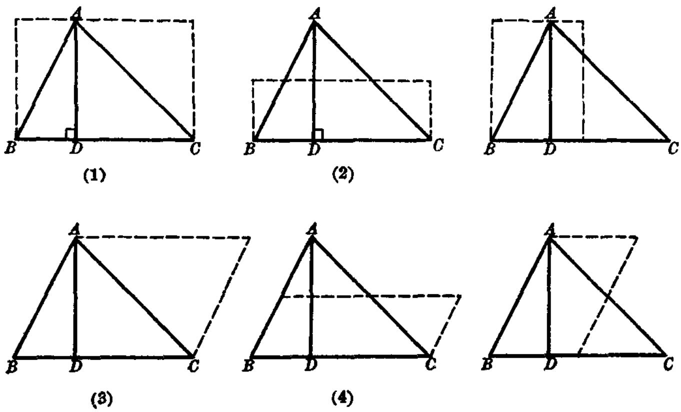
*10. 只用面积概念，不用計算公式，試就附图証明：

(1) 三角形与同底(或等底)同高(或等高)的矩形的一半等积．

(2) 三角形与同底(或同高)半高(半底)的矩形等积．

(3) 三角形与同底(或等底)同高(或等高)的平行四边形的一半等积．

(4) 三角形与同底(或同高)半高(或半底)的平行四边形等积．



(第 10 題)

§3·3 平行四边形的面积

前面已經推导出計算矩形面积的公式．平行四边形經过一定的割补以后，可以得到和它等积的矩形，我們就在这样的基础上来推导出平行四边形的面积公式．在推导之前，应当明确：平行四边形的任何一条边，象图 3·6 里的 AB，都可以做平行四边形的底，平行四边形的底和它平行对边間的距离，象图 3·6 里的 DD'，是平行四边形的高．

平行四边形面积定理 平行四边形的面积等于底和高的积．

已知 平行四边形 $ABCD$，它的底 $AB=b$，高 $DD'=h$（图

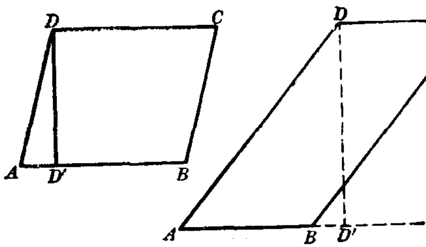


图 3·6

3·7).

求証　平行四边形 $ABCD$ 的面积 $= bh$.

【証】 过 C 引 CE' 垂直于 AB，E' 为垂足．四边形 $D'E'CD$ 为矩形．在直角三角形 $AD'D$ 和 $BE'C$ 中，AD 和 BC 是平行四边形的对边，所以它們相等．DD' 和 CE' 都是平行綫 AB 和 CD 間的距离，所以它們亦相等．从而

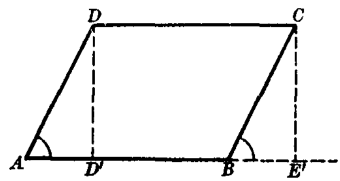


图 3·7

$\triangle AD'D \cong \triangle BE'C$．所以 $\triangle AD'D$ 和 $\triangle BE'C$ 等积．

$$\begin{aligned}
\square ABCD \text{ 的面积} &= \triangle AD'D \text{ 的面积} + \text{梯形 } D'BCD \text{ 的面积} \\
&= \triangle BE'C \text{ 的面积} + \text{梯形 } D'BCD \text{ 的面积} \\
&= \text{矩形 } D'E'CD \text{ 的面积} \\
&= DC \cdot E'C.
\end{aligned}$$

但 $$DC = AB,$$

$$E'C = D'D = h,$$

$$\therefore \quad \square ABCD \text{ 的面积} = AB \cdot D'D = bh.$$

如果 DD' 的垂足 D' 在 AB 的延长綫上(图 3·8)，那末有

$$\begin{aligned}
\square ABCD \text{ 的面积} &= \triangle AD'D \text{ 的面积} + \triangle ECD \text{ 的面积} \\
&\quad - \triangle BD'E \text{ 的面积} \\
&= \triangle BC'C \text{ 的面积} + \triangle ECD \text{ 的面积} \\
&\quad - \triangle BD'E \text{ 的面积}
\end{aligned}$$

$=$矩形 $D'C'CD$ 的面积

$=DC\cdot C'C$

$=AB\cdot D'D$

$=bh.$

在上面的証明里，我們用了面积的割补法.

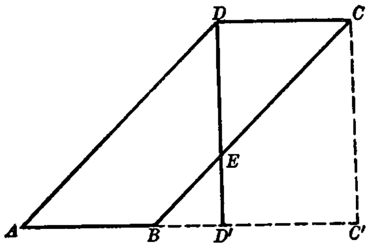


图 3·8

注意 請讀者研究，在图 3·7 和 3·8 里，我們在平行四边形 $ABCD$ 上割去了什么，补上了什么，才成为等积的矩形. 实际上，只是在图形里添画了一些綫段就完成了割补的手續.

例 1. 已知平行四边形 $ABCD$ 的一組邻边 AB 和 AD 分别长 5 厘米和 4 厘米，$\angle DAB=60°$（图3·9）. 求平行四边形 $ABCD$ 的面积.

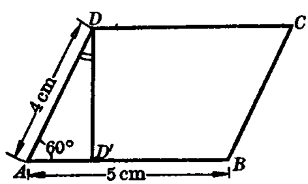


图 3·9

【解】 引平行四边形 $ABCD$ 的高 DD'. 在直角三角形 $AD'D$ 中，

$$\because \quad \angle A=60°, \qquad \therefore \quad \angle ADD'=30°.$$

我們已經知道，在含有 30° 角的直角三角形中，30° 角所对的边等于斜边的一半. 因此

$$AD'=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times 4=2\ (\mathrm{cm}).$$

根据勾股定理知，$AD^2=AD'^2+DD'^2$，

即 $$4^2=2^2+DD'^2.$$

从而 $$DD'=2\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}).$$

$$平行四边形\ ABCD\ 的面积=AB\cdot DD'=5\cdot 2\sqrt{3}$$
$$=10\sqrt{3}\approx 17.3\ (\mathrm{cm}^2).$$

答：平行四边形 $ABCD$ 的面积約为 17.3 平方厘米.

例 2. 已知 P 为平行四边形 $ABCD$ 对角綫 AC 的任意点，EF 和 GH 都通过 P，并且 $EF \parallel BC$，$GH \parallel AB$ (图 3·10). 求証平行四边形 $EBHP$ 的面积等于平行四边形 $GPFD$ 的面积.

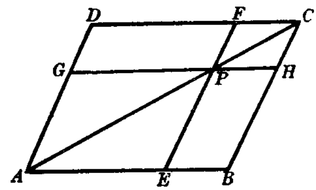


图 3·10

【証】 EF 和 GH 把 $\square ABCD$ 分为 4 个平行四边形，它們是：

$$\square AEPG,\ \square PHCF,\ \square EBHP,\ \square GPFD.$$

我們曾經在証明平行四边形的对边相等的过程中，附带証明了：平行四边形的任一条对角綫把平行四边形分为两个全等三角形. 据此，我們有：

$\triangle ABC \cong \triangle ADC$，从而 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 等积. (1)

$\triangle AEP \cong \triangle AGP$，从而 $\triangle AEP$ 和 $\triangle AGP$ 等积. (2)

$\triangle PHC \cong \triangle PFC$，从而 $\triangle PHC$ 和 $\triangle PFC$ 等积. (3)

現在

$\square EBHP$ 的面积

$=\triangle ABC$ 的面积 $-\triangle AEP$ 的面积 $-\triangle PHC$ 的面积.

$\square GPFD$ 的面积

$=\triangle ADC$ 的面积 $-\triangle AGP$ 的面积 $-\triangle PFC$ 的面积.

依据 (1), (2), (3) 得

$\square EBHP$ 的面积 $=\square GPFD$ 的面积.

例 3. 一个正方形和一个菱形的周长相等，比較它們的面积 (图 3·11).

【解】 設正方形和菱形的周长都为 $4a$，那末它們的每一边都等于 a. 又設菱形 $A'B'C'D'$ 的高 $D'E'=h$. 在直角三角形 $A'E'D'$

中，斜边 $A'D'>$ 直角边 $D'E'$，就是 $a>h$.

正方形 $ABCD$ 的面积 $=a^2$.

菱形 $A'B'C'D'$ 的面积 $=ah$.

$\because\ a>h$, $\therefore\ a^2>ah$. 因此正方形 $ABCD$ 的面积大于菱形 $A'B'C'D'$ 的面积.

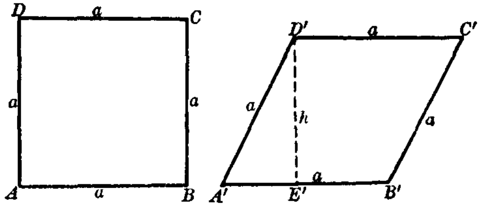


图 3·11

习 题 3·3

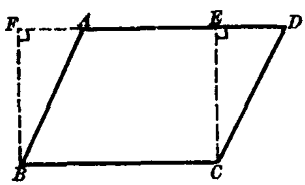
1. 如果平行四边形的底不变，当它的高增加(或减少)时，面积的变化怎样?

2. 已知平行四边形的底为 5 厘米，高为 3 厘米. 求它的面积；又这样的平行四边形能画几个?

3. 設有两等底的平行四边形，一个的面积是 182 平方米，高 14 米，另一个的面积是 126 平方米. 求它的高.

4. 如图. 証明 ▱$ABCD$ 的面积等于矩形 $EFBC$ 的面积.

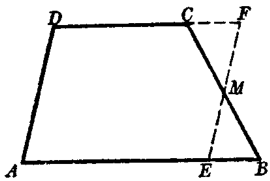
[提示：$ABCE$ 的面积 $+\triangle CDE$ 的面积 $=ABCE$ 的面积 $+\triangle BAF$ 的面积.]



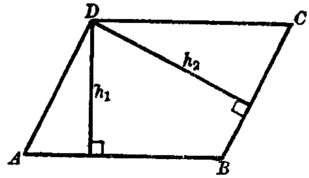
(第 4 题)

5. 假定梯形 $ABCD$ 的腰 BC 上的中点为 M，且过 M 的直綫 $EF\parallel AD$ (图附后). 証明 ▱$AEFD$ 的面积 = 梯形 $ABCD$ 的面积.

*6. 平行四边形两对对边間的距离分别为 h_1 和 h_2，周长为 $2s$，求它的面积.



（第 5 题）



（第 6 题）

[解：已知 ▱$ABCD$ 中，AB 上的高为 h_1，BC 上的高为 h_2。那末：

$$▱ABCD\text{ 的面积}=AB\cdot h_1=BC\cdot h_2.$$

由已知条件，
$$AB+BC+CD+DA=2s.$$

但
$$AB=CD,\quad BC=DA.$$

可知
$$AB+BC=s.$$

再从 $AB\cdot h_1=BC\cdot h_2$，得到

$$\frac{AB}{BC}=\frac{h_2}{h_1}.$$

应用合比定理

$$\frac{AB+BC}{BC}=\frac{h_1+h_2}{h_1},$$

$$\therefore\quad BC=\frac{(AB+BC)h_1}{h_1+h_2}=\frac{sh_1}{h_1+h_2}.$$

于是 ▱$ABCD$ 面积 $=BC\cdot h_2=\dfrac{sh_1h_2}{h_1+h_2}$.]

7．平行四边形的面积为 480 平方厘米，周长为 112 厘米，两条长边間的距离为 12 厘米. 求两条短边間的距离.

8．已知平行四边形的两边和夹角的值如下．求它的面积：

(1) $a, b, 30°$；　(2) $a, b, 45°$；　(3) $a, b, 60°$.

9．一个矩形和一个平行四边形的边都相等，而平行四边形的面积等于矩形的一半．求这平行四边形的銳角.

10．求証平行四边形的对角綫分平行四边形为四个等积的三角形.

[提示：可以利用 §3·3 例 2；或参照习题 3·2 的第 10 题.]

§3·4　三角形的面积

平行四边形的一条对角綫把平行四边形分为两个全等的，从而也是等积的三角形．反过来，我們也可把两个全等三角形拼凑

为一个平行四边形．这样就可以把計算三角形面积的問題归結为計算平行四边形面积的問題．下面的定理就是根据这个方法証明的．

三角形面积定理 三角形的面积等于底和高的积的一半．

已知 在$\triangle ABC$中，底$CA=b$，高$BB'=h$(图3·12)．

求証 $\triangle ABC$**的面积**$=\frac{1}{2}bh$．

【証】 过B引$BD\parallel CA$，过A引$AD\parallel CB$．BD和AD相交于D．显然四边形$CADB$为平行四边形，并且三角形CAB的底CA和高BB'分别为平行四边形$CADB$的底和高．因此

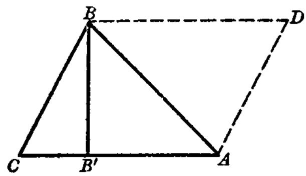


图 3·12

平行四边形$CADB$的面积$=bh$．

现在AB是平行四边形$CADB$的对角綫，它把这个平行四边形分为两个全等的三角形：$\triangle ABC$和$\triangle BAD$．从而

$$\triangle ABC\text{ 的面积}=\triangle BAD\text{ 的面积}.$$

$$\therefore\quad \square CADB\text{ 的面积}=\triangle ABC\text{ 的面积}+\triangle BAD\text{ 的面积}$$
$$=2\triangle ABC\text{ 的面积}.$$

$$\text{因此 }\triangle ABC\text{ 的面积}=\frac{1}{2}\square CADB\text{ 的面积}$$
$$=\frac{1}{2}bh.$$

注意 在这个証明里，請讀者研究一下在图3·12中我們添作了哪些綫段，就完成了拼凑两个全等三角形成为一个平行四边形的手續．

例1． 已知等边三角形ABC的一边为a，求証它的面积$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$(图3·13)．

【証】 作高CD，則CD又是AB边上的中綫，即$DB=\frac{1}{2}a$．

根据勾股定理，

$$BC^2=CD^2+DB^2.$$

即 $$a^2=CD^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2,$$

从而 $$CD=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\triangle ABC\text{ 的面积}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

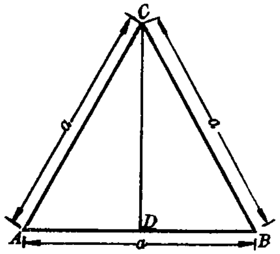


图 3·13

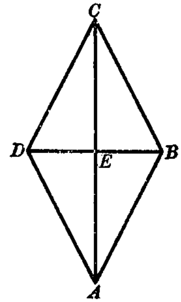


图 3·14

例 2. 已知菱形 $ABCD$ 的对角綫 $AC=l_1$, $BD=l_2$. 求証它的面积等于 $\frac{1}{2}l_1l_2$(图 3·14).

【証】 設 AC, BD 相交于 E,

$\because$ 菱形的对角綫互相垂直平分,

$$\therefore\quad AE=EC=\frac{1}{2}l_1,$$

$$EB=DE=\frac{1}{2}l_2.$$

并且直角三角形 EBC, EDC, EBA, EDA 都是全等的,因此它們也是等积的.

$$\begin{aligned}\triangle EBC\text{ 的面积}&=\frac{1}{2}EB\cdot EC\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}l_2\cdot\frac{1}{2}l_1\\&=\frac{1}{8}l_1l_2.\end{aligned}$$

$$\text{菱形 } ABCD \text{ 的面积} = 4\cdot\triangle EBC \text{ 的面积}$$

$$= 4\cdot\frac{1}{8}l_1l_2$$

$$= \frac{1}{2}l_1l_2.$$

例 3. 菱形的高为 12 厘米，較短的一条对角綫为 13 厘米．求它的面积．

已知 菱形 $ABCD$，它的高 $DD'=12\,\text{cm}$，对角綫 $BD=13\,\text{cm}$（图 3·15）．

求菱形 $ABCD$ 的面积．

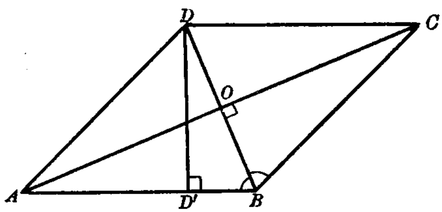


图 3·15

【解】 直角三角形 BDD' 的三边分别为：

$$BD=13\,\text{cm},\quad DD'=12\,\text{cm},$$

$$D'B=\sqrt{13^2-12^2}=5(\text{cm}).$$

直角三角形 BCO 的边

$$BO=\frac{1}{2}\times 13=6.5(\text{cm}).$$

$\because$ 菱形的每一条对角綫平分一組对角，

$$\therefore\quad \angle D'BD=\angle OBC,$$

从而 $\triangle BDD' \backsim \triangle BCO$．因此

$$D'B:OB=DD':CO,$$

$$5:6.5=12:CO,$$

$$CO=\frac{6.5\times 12}{5}=15.6(\text{cm}).$$

对角綫 $AC=2CO=31.2\,\text{cm}$.

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积$=\dfrac{1}{2}\times 13\times 31.2=202.8\,(\text{cm}^2)$.

答: 菱形 $ABCD$ 的面积为 202.8 平方厘米.

例 4. 已知 $\triangle ABC$ 的三边: $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, (图 3·16)并且 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$. 求証

$$\triangle ABC\text{的面积}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

【証】 已知 $\triangle ABC$ 的三边分别为 a, b, c, 我們根据 §2·5 可以求得 $\triangle ABC$ 在 CA 边上的高 BD 为

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$\therefore\quad \triangle ABC \text{ 的面积}=\frac{1}{2}b\cdot h_b$$

$$=\frac{b}{2}\cdot\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

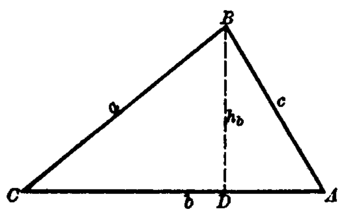


图 3·16

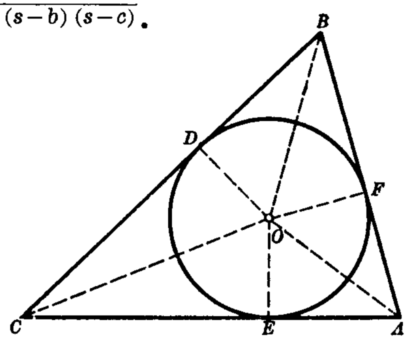


图 3·17

例 5. 已知 $\triangle ABC$ 的三边: $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, (图 3·17)并且 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$. 求証 $\triangle ABC$ 內切圓的半徑

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

【証】 作 $\triangle ABC$ 的內切圓 O, 这个圓分别切 AB 于 F, 切 BC 于 D, 切 CA 于 E. 連結 OA, OB, OC, OF, OD, OE. 显然 $OF=OD=OE=r$, 并且 $OF\perp AB$, $OD\perp BC$, $OE\perp CA$.

$\triangle ABC$ 的面积 $=\triangle OAB$ 的面积 $+\triangle OBC$ 的面积 $+\triangle OCA$ 的面积

$$=\frac{1}{2}AB\cdot OF+\frac{1}{2}BC\cdot OD+\frac{1}{2}CA\cdot OE$$

$$=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

$$=sr.$$

$\because$ $\triangle ABC$ 的面积 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

即 $$sr=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$\therefore$ $$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

例 6. 已知 $\triangle ABC$ 的三边 $BC=11\,\text{cm}$, $CA=13\,\text{cm}$, $AB=20\,\text{cm}$. 求 $\triangle ABC$ 的面积和它的内切圆的半径.

【解】 $$s=\frac{1}{2}(11+13+20)=22.$$

$$s-a=22-11=11,$$

$$s-b=22-13=9,$$

$$s-c=22-20=2.$$

$$\triangle ABC\text{ 的面积}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{22\times11\times9\times2}$$

$$=66\ (\text{cm}^2).$$

$$\triangle ABC\text{ 的内切圆半径}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$=\sqrt{\frac{11\times9\times2}{22}}$$

$$=3\ (\text{cm}).$$

答: $\triangle ABC$ 的面积为 66 平方厘米,内切圆半径为 3 厘米。

习 题 3·4

1. 証明等底等高的两个三角形等积.

2. 已知三角形两边中点所連結的綫段等于 m,第三边上的高为 h. 求这个三角形的面积.

3. 已知等腰三角形的底为 a, 一腰为 b. 求它的面积.

4. 已知等边三角形的高为 h，求它的面积.

5. 已知等边三角形的面积为 $36\sqrt{3}$ 平方米，求它的高.

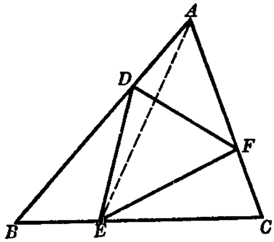
6. 證明在直角三角形中，两直角边的乘积，等于斜边和斜边上高的乘积.

7. 已知等边三角形的面积为 $144\sqrt{3}$ 平方厘米，求它的边长.

8. $\triangle ABC$ 中，如果 CM 是 AB 边上的中綫，證明 $\triangle AMC$ 与 $\triangle BMC$ 等积.

*9. 證明三角形的三条中綫分原三角形为六个等积的三角形.

*10. 在 $\triangle ABC$ 的各边 AB, BC, CA 上取 AD, BE, CF 各等于边的三分之一，求證 $\triangle DEF$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的三分之一.



(第 10 題)

[證：連結 AE. 已知 $BE=\frac{1}{3}BC$, BC 和 BE 各是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABE$ 的底，这两三角形有同高，因此

$$\triangle ABE \text{ 的面积}=\frac{1}{3}\triangle ABC \text{ 的面积}.$$

又由 $BD=\frac{2}{3}AB$, 可知 $\triangle BED$ 的面积 $=\frac{2}{3}\triangle ABE$ 的面积. 即

$$\triangle BED \text{ 的面积}=\frac{2}{9}\triangle ABC \text{ 的面积}.$$

同样的理由，可知

$$\triangle CEF \text{ 的面积}=\frac{2}{9}\triangle ABC \text{ 的面积},$$

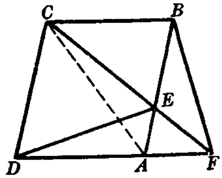
$$\triangle ADF \text{ 的面积}=\frac{2}{9}\triangle ABC \text{ 的面积}.$$

$$\therefore\quad \triangle DEF \text{ 的面积}=\left(1-3\times\frac{2}{9}\right)\triangle ABC \text{ 的面积}=\frac{1}{3}\triangle ABC \text{ 的面积}.]$$

11. 从等边三角形内的任何一点向三边引垂綫，求證这三条垂綫的和是一个定值.

[提示：定值等于这个等边三角形的高.]

12. 設 E 为 ▱$ABCD$ 的边 AB 上的任意一点，延长 CE 交 DA 的延长綫于 F. 求證 $\triangle AED$ 与 $\triangle BEF$ 等积.



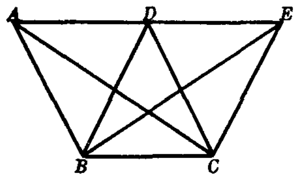
(第 12 題)

[提示：連結 ▱$ABCD$ 的对角綫 AC, 注意 $\triangle AEC$ 与 $\triangle AED$, $\triangle BEF$ 有什么关系.]

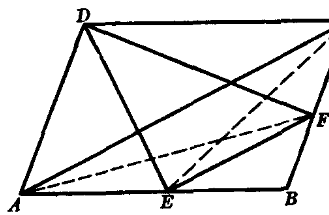
13. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. P 为 $\triangle ABC$ 內的任意一点，从 P 到 BC, CA 和 AB 的距离分别为 x, y, z. 証明 $ax+by+cz$ 是一个定值.

[提示：定值等于 $\triangle ABC$ 面积的两倍.]

14. 如果 $AE \parallel BC$（如图），点 D 在 AE 上. 証明 $\triangle ABC$ 的面积 $=\triangle DBC$ 的面积 $=\triangle EBC$ 的面积；并說明 AE 这条直綫是什么点的軌迹.



（第 14 題）



（第 15 題）

15. 在 $\square ABCD$ 中，已知 $EF \parallel AC$（如图）. 求証

$\triangle AED$ 的面积 $=\triangle CFD$ 的面积.

[提示：$\triangle AED$ 与 $\triangle AEC$ 是等积的；$\triangle CFD$ 和 $\triangle AFC$ 是等积的，注意 $\triangle AEC$ 和 $\triangle AFC$ 的关系.]

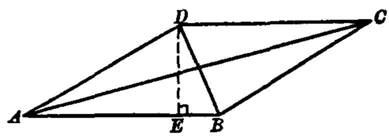
16. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 Δ，周长为 $2s$. 証明它的內切圓半徑 $r=\dfrac{\Delta}{s}$.

17. 已知菱形的边是二对角綫的比例中項，求它的銳角.

[已知：菱形 $ABCD$ 中，

$\angle A<90^\circ$. $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AB}{BD}$.

求角 A.



（第 17 題）

解：在已知菱形 $ABCD$ 中，$AB^2=AC\cdot BD$. 由 § 3·4 的例 2 知，

$$\text{菱形 } ABCD \text{ 的面积}=\frac{1}{2}AC\cdot BD,$$

$$\therefore \qquad \text{菱形 } ABCD \text{ 的面积}=\frac{1}{2}AB^2.$$

如果过 D 作 AB 边上的高 DE，那末可由平行四边形的面积求法，得

$$\text{菱形 } ABCD \text{ 的面积}=AB\cdot DE.$$

于是
$$AB\cdot DE=\frac{1}{2}AB^2,$$

因此 $$DE=\frac{1}{2}AB.$$

但 $$AB=AD,$$

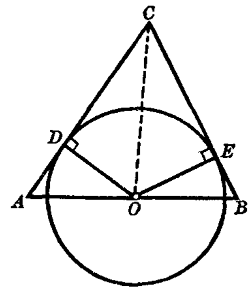
$$\therefore\quad DE=\frac{1}{2}AD.$$

在直角三角形 $\triangle ADE$ 中，AD 是斜边，可知 $\angle A=30°$.]

18. 已知菱形对角綫的长是 16 分米和 12 分米，求它的高.

19. 已知三角形的三边分别是 3 厘米，4 厘米和 5 厘米，求它的面积.

*20. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=14$ cm，$BC=13$ cm，$CA=15$ cm. 作一圓使圓心 O 在 AB 边上，且分别切 AC，BC 于 D 和 E. 求圓 O 的半徑(如图).



(第 20 題)

[解：設圓 O 的半徑为 R，则

$$R=OD=OE=x.$$

連接 OC，可知

$$\triangle AOC\text{ 的面积}=\frac{1}{2}AC\cdot OD=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot x,$$

$$\triangle BOC\text{ 的面积}=\frac{1}{2}BC\cdot OE=\frac{1}{2}\cdot 13\cdot x.$$

于是

$$\triangle ABC\text{ 的面积}=\triangle AOC\text{ 的面积}+\triangle BOC\text{ 的面积}=\frac{1}{2}(15x+13x)=14x.$$

根据 §3·4 例 4，在 $\triangle ABC$ 中，

$$s=\frac{1}{2}(13+14+15)=21.$$

$$\therefore\quad \triangle ABC\text{ 的面积}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=84.$$

因此 $$14x=84,\qquad \therefore\quad x=6.$$

答：圓 O 的半徑为 6 厘米.]

*21. 已知三角形三边的比是 9:10:17，它的面积是 144 平方厘米. 求这个三角形的各边.

§3·5 梯形的面积

梯形的对角綫分梯形为两个三角形，因此我們可以利用三角

形的面积公式,推导出梯形的面积公式.

梯形面积定理 梯形的面积等于高和两底和的积的一半.

已知 梯形 $ABCD$, 上底 $CD=b$, 下底 $AB=b'$, 高 $DD'=h$ (图 3·18).

求証 **梯形 $ABCD$ 的面积$=\frac{1}{2}(b+b')h$.**

【証】 作对角綫 AC, AC 分梯形 $ABCD$ 为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$. 以 A 为頂点, 作 $\triangle ACD$ 的高 AA', 以 C 为頂点, 作 $\triangle ABC$ 的高 CC'. $\because$ $AB \parallel CD$, $\therefore$ $\triangle ABC$ 的高 CC' 和 $\triangle ACD$ 的高 AA' 相等,并且都等于 DD'.

梯形$ABCD$ 的面积$=\triangle ACD$ 的面积$+\triangle ABC$ 的面积,

$$=\frac{1}{2}CD\cdot AA'+\frac{1}{2}AB\cdot CC',$$

$$=\frac{1}{2}b\cdot h+\frac{1}{2}b'\cdot h,$$

$$=\frac{1}{2}(b+b')h.$$

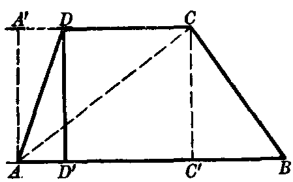


图 3·18

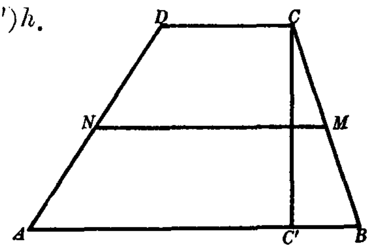


图 3·19

推論 梯形的面积等于中位綫和高的积.

已知 梯形 $ABCD$, 中位綫 $MN=m$, 高 $CC'=h$(图 3·19).

求証 梯形 $ABCD$ 的面积$=mh$.

【証】 梯形 $ABCD$ 的面积$=\frac{1}{2}(AB+CD)CC'$.

$\because$ 梯形的中位綫等于两底的和的一半,即

$$MN=\frac{1}{2}(AB+CD),$$

$$\therefore\quad \text{梯形 } ABCD \text{ 的面积} = MN \cdot CC'$$
$$= mh.$$

例 1. 等腰梯形的两底分别为 51 厘米和 69 厘米，腰为 41 厘米. 求它的面积.

已知 在梯形 $ABCD$ 中，$AB=69\,\text{cm}$，$BC=DA=41\,\text{cm}$，$CD=51\,\text{cm}$(图 3·20).

求梯形 $ABCD$ 的面积.

【解】 作梯形的高 DD' 和 CC'.

$$\because\quad DA=BC,\quad DD'=CC',$$

$$\therefore\quad \text{直角三角形 } AD'D \cong \text{直角三角形 } BC'C,$$

从而

$$AD'=BC'.$$

$$\because\quad \text{四边形 } D'C'CD \text{ 为矩形},$$

$$\therefore\quad CD=C'D'.$$

由此得

$$AD'=\frac{1}{2}(AB-CD)=\frac{1}{2}\times(69-51)=9(\text{cm}).$$

从勾股定理，得

$$DD'=\sqrt{AD^2-AD'^2}=\sqrt{41^2-9^2}=40(\text{cm}).$$

$$\therefore\quad \text{梯形 } ABCD \text{ 的面积}=\frac{1}{2}\times(69+51)\times 40$$
$$=2400(\text{cm}^2).$$

答：梯形 $ABCD$ 的面积为 2400 平方厘米.

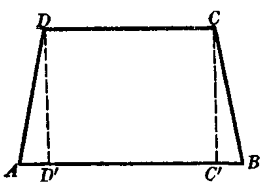


图 3·20

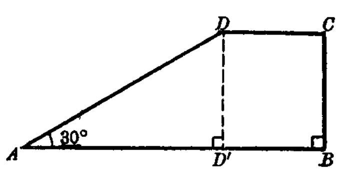


图 3·21

例 2. 已知直角梯形 $ABCD$ 的一个銳角 A 为 $30°$，$AB+CD=m\,\text{cm}$，$BC+AD=n\,\text{cm}$（图 3·21）.

求梯形 $ABCD$ 的面积.

【解】 作梯形的高 DD'.

$$\because \quad \text{直角三角形 } AD'D \text{ 的銳角 } A=30°,$$

$$\therefore \quad AD=2DD'.$$

$$\because \quad \text{四边形 } D'BCD \text{ 为矩形},$$

$$\therefore \quad D'D=BC.$$

設 $DD'=h$，那末

$$BC+AD=DD'+2DD'=3DD'=3h=n,$$

$$\therefore \quad h=\frac{1}{3}n\,(\text{cm}).$$

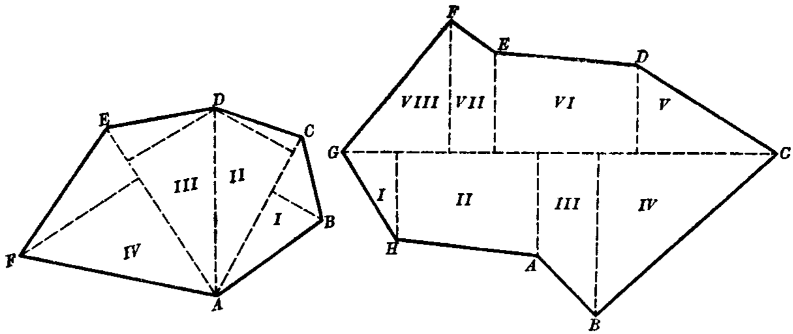
$$\text{梯形 } ABCD \text{ 的面积}=\frac{1}{2}h(AB+CD)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{3}\cdot m$$

$$=\frac{1}{6}mn(\text{cm}^2).$$

答：梯形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{6}mn$ 平方厘米.

以上我們推导了計算矩形，平行四边形，三角形，梯形的面积公式．其他多边形我們可以将它划分成三角形或梯形，然后計算这些三角形和梯形的面积，它們面积的和就是原多边形的面积．图 3·22 表示了怎样把一个多边形划分为三角形或梯形的方法．在图 3·22(1) 里，从頂点 A 所引的对角綫把多边形 $ABCDEF$ 划分成四个三角形．請讀者在图里找出这些三角形的底和高，研究怎样計算这个多边形的面积．在图 3·22(2) 里，对角綫 CG 把多边形 $ABCDEFGH$ 划分成两部分，再从其他頂点向 CG 作垂綫，这些垂綫又把每一个部分划分为直角三角形和直角梯形．請讀者在图里找出这些直角三角形的底和高，直角梯形的两条底和高，研究怎



(1) (2)

图 3·22

样計算这个多边形的面积.

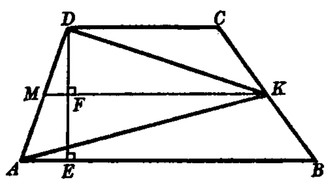
习 题 3·5

1. 等腰梯形的腰为1分米,而短底为16厘米,腰和长底所夹的角为60°. 求它的面积.

2. 在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB=AD$, $CB=CD$, 对角綫 $AC=a$, $BD=b$. 計算它的面积.

3. 已知一梯形的高为8尺,面积为2平方丈. 求两腰中点連綫的长.

*4. 証明: 以梯形的一腰的中点及其另一腰的两端为頂点的三角形的面积,为原梯形面积的一半.



(第4题)

[証: 假設点 K 是已知梯形 $ABCD$ 的腰 BC 的中点, 引两腰中点連綫 KM, 以及高 DE, DE 交 KM 于点 F. 那末,

$$梯形\ ABCD\ 的面积=\frac{1}{2}(AB+DC)\cdot DE=KM\cdot DE,$$

而

$$\triangle ADK\text{ 的面积}=\triangle AMK\text{ 的面积}+\triangle DKM\text{ 的面积}$$
$$=\frac{1}{2}KM\cdot(EF+DF)=\frac{1}{2}KM\cdot DE.$$

$$\therefore\quad \triangle ADK\text{ 的面积}=\frac{1}{2}\text{梯形 }ABCD\text{ 的面积}.]$$

5. 設一梯形的长底是短底的3倍，又是高的2倍．已知它的面积是1176平方米．求两底和高的长度．

6. 把梯形的长底延长，使延长部分等于短底．同向延长短底，且延长部分等于长底．連結这两延长綫段的端点，那末得到怎样的图形？和原梯形的面积有什么关系？

*7. 从三角形 ABC 的各頂点作三条平行綫 AD, BE 和 CF，各与对边或它的延长綫交于 D, E 和 F．求証 $\triangle DEF$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的2倍．

[提示：設 D 为 BC 边上的点，E 和 F 分别在其他二边的延长綫上．先看 $\triangle DEF$ 可以分为哪三部分？$\triangle ADE$ 与 $\triangle ADB$ 有什么关系？$\triangle ADF$ 与 $\triangle ADC$ 呢？能不能再証明 $\triangle AEF$ 与 $\triangle ABC$ 的面积相等？]

8. 过平行四边形的对角綫交点的任意一条直綫，分这平行四边形为等积的两部分．

9. 延长 $\triangle ABC$ 的边 AB 到 D, BC 到 E, CA 到 F，使 $AB=BD$, $BC=CE$, $CA=AF$．証明 $\triangle DEF$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的7倍．

10. 已知 E 为四边形 $ABCD$ 的对角綫 AC 和 BD 的交点，求証

$$\frac{\triangle ABC\text{ 面积}}{\triangle CDA\text{ 面积}}=\frac{BE}{DE}.$$

§3·6 相似多边形的面积的比

我們先研究两个相似三角形的面积的比．

相似三角形面积的比定理 相似三角形的面积的比等于它們相似比的平方

已知 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$（图3·23）．

求証 $\dfrac{\triangle ABC\text{ 的面积}}{\triangle A'B'C'\text{ 的面积}}=\left(\dfrac{AB}{A'B'}\right)^2.$

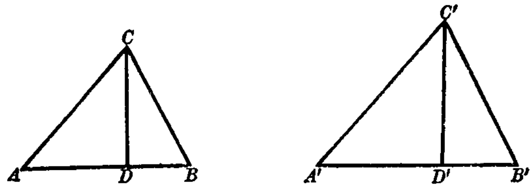


图 3·23

【証】 作$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的高CD和$C'D'$.

$$\frac{\triangle ABC\text{ 的面积}}{\triangle A'B'C'\text{ 的面积}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot CD}{\frac{1}{2}A'B'\cdot C'D'}=\frac{AB\cdot CD}{A'B'\cdot C'D'}.$$

$\because$ 相似三角形对应高的比等于它們的相似比,即

$$\frac{CD}{C'D'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle ABC\text{ 的面积}}{\triangle A'B'C'\text{ 的面积}}=\frac{AB\cdot AB}{A'B'\cdot A'B'}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2.$$

例 1. 如果两个三角形有一个角相等，那末它們面积的比等于夹这个等角的两边乘积的比.

已知 $\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$(图 3·24).

求証 $\dfrac{\triangle ABC\text{ 的面积}}{\triangle A'B'C'\text{ 的面积}}=\dfrac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}.$

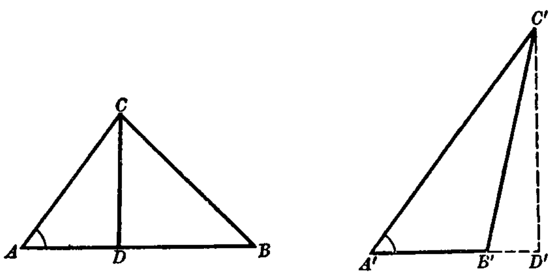


图 3·24

【証】 分别作$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的高CD和$C'D'$.

在直角三角形ACD和$A'C'D'$中,

$$\because\qquad \angle A=\angle A',$$

$$\therefore \qquad \triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'.$$

从而
$$\frac{CD}{C'D'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

$$\frac{\triangle ABC\text{ 的面积}}{\triangle A'B'C'\text{ 的面积}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot CD}{\frac{1}{2}\ A'B'\cdot C'D'}=\frac{AB\cdot CD}{A'B'\cdot C'D'}$$

$$=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}.$$

如果在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $\angle BAC+\angle B'A'C'=180°$, (图 3·25)那末等式 $\dfrac{\triangle ABC\text{ 的面积}}{\triangle A'B'C'\text{ 的面积}}=\dfrac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}$ 能否成立? 我們分别作这两个三角形的高 BD 和 $B'D'$,找出 $\triangle ABD$ 和 $\triangle A'B'D'$ 的关系,請讀者考慮答复这个問題.

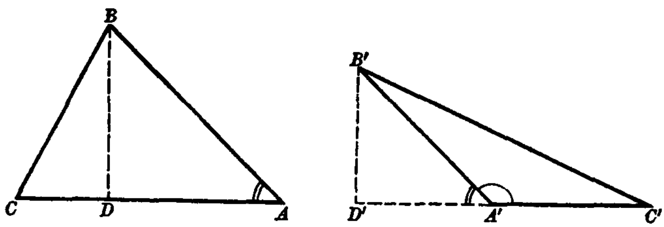


图 3·25

例 2. 已知 $\triangle ABC$ 的边 AC 上有一个定点 D. 在边 AB 上求作一点 E, 使 $\triangle AED$ 的面积为 $\triangle ABC$ 的面积的五分之一(图 3·26).

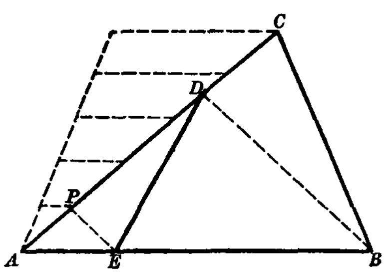


图 3·26

分析 設 E 是求作的点. $\triangle AED$ 和 $\triangle ABC$ 有一角 A 相等，根据例 1，有

$$\frac{\triangle AED\text{ 的面积}}{\triangle ABC\text{ 的面积}}=\frac{AD\cdot AE}{AC\cdot AB}=\frac{1}{5}.$$

从而
$$AD\cdot AE=\frac{AC}{5}\cdot AB,$$

即
$$AD:AB=\frac{AC}{5}:AE.$$

在这个比例里，綫段 AD, AB 为已知. AC 也为已知，所以 $\frac{AC}{5}$ 为可作. 因此第四比例項 AE 是可作的.

【作法】 五等分 AC，得 $AP=\frac{1}{5}AC$. 連結 DB. 过 P 引 $PE\parallel DB$，交 AB 于 E. 連結 DE. 則 $\triangle AED$ 的面积为 $\triangle ABC$ 的面积的五分之一.

【証】 $\because\ PE\parallel DB$, $\quad\therefore\ AP:AD=AE:AB$,

即
$$AE=\frac{AP\cdot AB}{AD}=\frac{\frac{1}{5}AC\cdot AB}{AD}.$$

$$\frac{\triangle AED\text{ 的面积}}{\triangle ABC\text{ 的面积}}=\frac{AD\cdot AE}{AC\cdot AB}$$

$$=\frac{AD}{AC\cdot AB}\cdot\frac{\frac{1}{5}AC\cdot AB}{AD}$$

$$=\frac{1}{5}.$$

即
$$\triangle AED\text{ 的面积}=\frac{1}{5}\triangle ABC\text{ 的面积}.$$

注意 如果点 D 在 A, P 两点之間，本题无解. 如果点 D 和点 P 重合，那末点 E 和頂点 B 重合.

相似多边形面积的比定理 两个相似多边形面积的比等于它們相似比的平方.

我們以五边形为例来証明，对于其它边数的多边形，也可用同

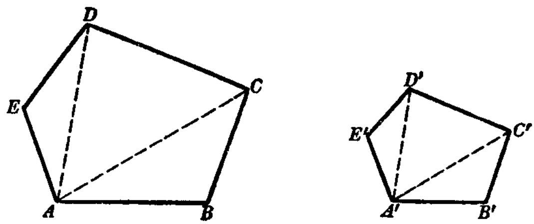


图 3·27

样的方法証明(图 3·27).

已知 五边形 $ABCDE \backsim$ 五边形 $A'B'C'D'E'$.

求証 $\dfrac{\text{五边形 } ABCDE \text{ 的面积}}{\text{五边形 } A'B'C'D'E' \text{ 的面积}}=\left(\dfrac{AB}{A'B'}\right)^2$.

【証】 过 A 和 A' 分别作五边形 $ABCDE$ 和 $A'B'C'D'E'$ 的对角綫 AC, AD 和 $A'C'$, $A'D'$. 这些对角綫把两个相似五边形分成个数相等,排列順序相同,并且一一对应的相似的三角形,即

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C', \quad \triangle ACD \backsim \triangle A'C'D',$$
$$\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'.$$

根据相似三角形的面积比定理,有

$$\frac{\triangle ABC \text{ 的面积}}{\triangle A'B'C' \text{ 的面积}}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2, \tag{1}$$

$$\frac{\triangle ACD \text{ 的面积}}{\triangle A'C'D' \text{ 的面积}}=\left(\frac{CD}{C'D'}\right)^2, \tag{2}$$

$$\frac{\triangle ADE \text{ 的面积}}{\triangle A'D'E' \text{ 的面积}}=\left(\frac{EA}{E'A'}\right)^2. \tag{3}$$

$$\because \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'},$$

$\therefore$ (2), (3) 两式成为

$$\frac{\triangle ACD \text{ 的面积}}{\triangle A'C'D' \text{ 的面积}}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2, \tag{4}$$

$$\frac{\triangle ADE \text{ 的面积}}{\triangle A'D'E' \text{ 的面积}}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2. \tag{5}$$

对(1), (4), (5)三式,应用等比定理,得

$$\frac{\triangle ABC\text{的面积}+\triangle ACD\text{的面积}+\triangle ADE\text{的面积}}{\triangle A'B'C'\text{的面积}+\triangle A'C'D'\text{的面积}+\triangle A'D'E'\text{的面积}}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2.$$

即

$$\frac{\text{五边形}ABCDE\text{的面积}}{\text{五边形}A'B'C'D'E'\text{的面积}}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2.$$

例 3. 以直角三角形两条直角边 BC, CA 和斜边 AB 分别为对应边，作相似多边形 P, Q 和 R. 那末多边形 P 和 Q 的面积的和等于多边形 R 的面积(图 3·28).

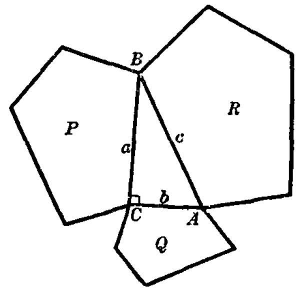


图 3·28

已知 直角三角形 ABC 中，AB 为斜边，多边形 $P\backsim$ 多边形 $Q\backsim$ 多边形 R; BC, CA, AB 为它們的对应边.

求証 多边形 P 的面积+多边形 Q 的面积=多边形 R 的面积.

【証】 根据相似多边形的面积比定理，有

$$\frac{\text{多边形}P\text{的面积}}{\text{多边形}R\text{的面积}}=\frac{BC^2}{AB^2},$$

$$\frac{\text{多边形}Q\text{的面积}}{\text{多边形}R\text{的面积}}=\frac{CA^2}{AB^2}.$$

两式相加，

$$\frac{\text{多边形}P\text{的面积}+\text{多边形}Q\text{的面积}}{\text{多边形}R\text{的面积}}=\frac{BC^2+CA^2}{AB^2}.$$

根据勾股定理，

$$\frac{BC^2+CA^2}{AB^2}=\frac{AB^2}{AB^2}=1,$$

从而

$$\frac{\text{多边形}P\text{的面积}+\text{多边形}Q\text{的面积}}{\text{多边形}R\text{的面积}}=1,$$

即

多边形 P 的面积＋多边形 Q 的面积＝多边形 R 的面积.

注意 这个例题在作图方面有广泛的应用. 如果我們取两个已知相似多边形的一組对应边，作为一个直角三角形的两条直角边，再以这个直角三角形的斜边作对应边，作一个和已知多边形相似的多边形. 那末所作多边形的面积，等于两个已知多边形的面积的和.

习 题 3·6

1. 在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上的一点. 为什么 $\dfrac{\triangle ABD\text{面积}}{\triangle ACD\text{面积}}=\dfrac{BD}{CD}$？

2. 在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上的一点，O 是 AD 上的任意一点. 求証

$$\frac{\triangle AOB\text{面积}}{\triangle AOC\text{面积}}=\frac{BD}{CD}.$$

3. 当三角形的各边都扩大 2 倍的时候，这个三角形的面积扩大多少倍？各边都扩大 3 倍呢？各边都扩大 4 倍呢？

4. 三角形一边的长是 5 分米，与它相似的另一个三角形的面积是它的 2 倍. 求这个三角形中与 5 分米对应的一边的长.

5. 三个相似多边形面积的和是 232 平方厘米，对应边的比是 $2:3:4$. 求各多边形的面积.

[提示：这三个相似多边形面积的比是 $2^2:3^2:4^2=4:9:16$，因此可設它們的面积分别为 $4K$，$9K$，$16K$.]

6. 在 $\triangle ABC$ 中，D 与 E 两点分别在 AB，AC 边上，而且

$$\frac{AD}{DB}=\frac{2}{3},\qquad \frac{AE}{EC}=\frac{3}{4}.$$

求証 $\triangle ADE$ 面积的 35 倍是 $\triangle ABC$ 面积的 6 倍.

7. 証明相似三角形面积的比，等于对应边上高的平方比.

8. 証明相似多边形面积的比，等于周长的平方的比.

[提示：相似多边形周长的比等于它們对应边的比.]

9. 两个相似多边形面积之和为 25 平方分米，它們的一对对应边为 2 分米和 1.5 分米. 試求这二个多边形的面积.

10. 梯形的对角綫分它的面积成两部分的比是 $3:7$. 由上底的一端引一条平行于腰的直綫，梯形被这条直綫分成两部分，求这两部分的面积的比.

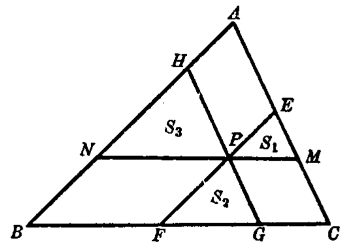
11. 三角形中两边中点的連綫，将三角形面积分成两部分的比是多少？

12. 在第 10 题中，求这梯形被两腰中点連綫所分成的两部分面积的比.

13．两个三角形有一角对应相等，夹这等角的边各为 12 分米，28 分米和 21 分米，24 分米．求这两个三角形的面积的比．

14．延长 $\triangle ABC$ 的边 BA 到 D，使 $AD=0.2BA$．延长 BC 到 E，使 $CE=\frac{2}{3}BC$．連 DE．求 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBE$ 的面积的比．

*15．經过已知三角形內某点引三条平行于三角形各边的直綫，这些直綫分三角形为六部分，其中三个三角形的面积为 S_1, S_2, S_3．求已知三角形的面积．



（第 15 题）

［已知：$\triangle ABC$ 内一点 P，过点 P 的三条直綫 $EF \parallel AB$, $GH \parallel CA$, $MN \parallel BC$．$\triangle PEM$ 的面积$=S_1$，$\triangle PFG$ 的面积$=S_2$，$\triangle PHN$ 的面积$=S_3$．

求 $\triangle ABC$ 的面积．

解：由假設条件对应边平行

$$\therefore \qquad \triangle HNP \backsim \triangle EPM \backsim \triangle PFG \backsim \triangle ABC.$$

令 $\triangle ABC$ 的面积$=S$，那末

$$\frac{S_1}{S}=\frac{PM^2}{BC^2}, \quad \frac{S_2}{S}=\frac{FG^2}{BC^2}, \quad \frac{S_3}{S}=\frac{NP^2}{BC^2}.$$

这些等式，可以改写为：

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{PM}{BC}, \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{FG}{BC}, \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{NP}{BC}.$$

因此，

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{PM+FG+NP}{BC},$$

但是

$$NP=BF, \quad PM=GC,$$

$$\therefore \qquad \frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{BF+FG+GC}{BC}=\frac{BC}{BC}=1.$$

$$\therefore \quad \sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}.$$

即

$$\triangle ABC \text{ 的面积}=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2.]$$

16．从三角形的頂点起将它的一边分成 $2:3:4$ 三段，过各分点作底边的平行綫，求这些平行綫所分三角形面积各部分的比．

§ 3·7 关于多边形面积的作图题

在§3·1里我們提到过多边形面积的割补法．通过割补法，我們可以作出一个和已知多边形面积相等但是形状不同的多边形．从几何作图的观点来看，这是叫做**等积变形的作图法**．在关于多边形面积的作图题里，有不少作图题都是利用等积变形来完成的．

現在先研究图3·29．这里$XY \parallel AB$，它們間的距离为h，$\triangle ABC_1$的頂点C_1，和$\triangle ABC_2$的頂点C_2都在XY上．显然$\triangle ABC_1$和$\triangle ABC_2$有相同的底AB和相等的高h，因此它們是等积的（它們的面积都等于$\frac{1}{2}AB\cdot h$）．应用“同底等高的三角形是等积形”的道理，可以解决不少有关等积变形的作图题．下面是一些簡单的例子．

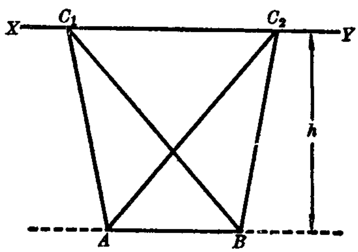


图 3·29

例1．已知$\triangle ABC$．求作一个和它等积的三角形，并且分别滿足下列条件：

(1) 是等腰的；

(2) 有一个底角等于已知角α；

(3) 它的頂角等于已知角β；

(4) 底边上的中綫等于已知綫段l（图3·30）．

【作法】 (1) 过$\triangle ABC$的頂点A，引$XY \parallel BC$．作BC的垂直平分綫MN．MN和XY交于A'．連結$A'B$和$A'C$．那末

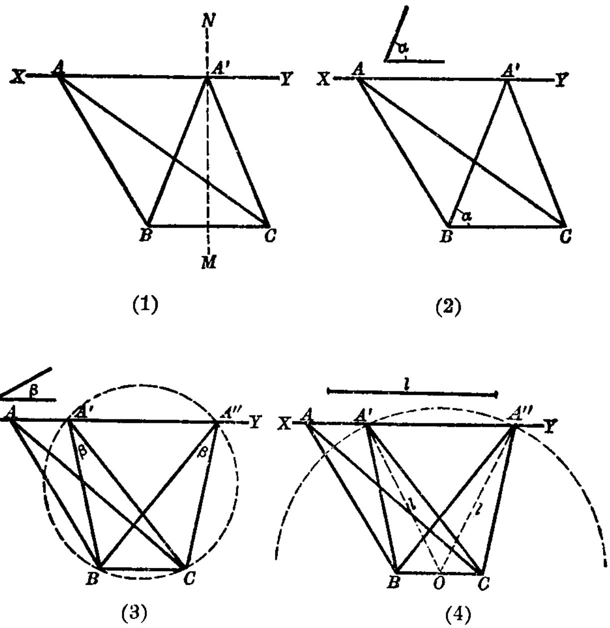


图 3·30

$\triangle A'BC$ 是等腰三角形，并且和 $\triangle ABC$ 等积(图 3·30(1))。

(2) 过 $\triangle ABC$ 的頂点 A，引 $XY \parallel BC$. 以 CB 为一边，B 作頂点，作角 $CBA'=\alpha$，$\angle CBA'$ 的边 BA' 交 XY 于 A'. 連結 $A'C$. 那末 $\triangle A'BC$ 有一个底角等于 α，并且和 $\triangle ABC$ 等积(图 3·30(2))。

(3) 过 $\triangle ABC$ 的頂点 A，引 $XY \parallel BC$. 在綫段 BC 上作含有已知圓周角 β 的弧，交 XY 于 A'. 連結 $A'B$ 和 $A'C$. 那末 $\triangle A'BC$ 的頂角为 β，并且它和 $\triangle ABC$ 等积(图 3·30(3))。

注意 直綫 XY 可能与圓弧相交，相切或相离，因此本题可能有两解，一解或无解.

(4) 过 $\triangle ABC$ 的頂点 A，引 $XY \parallel BC$. 以 BC 的中点 O 为圓心，已知綫段 l 为半徑作圓弧，交 XY 于 A'. 連結 $A'B$和 $A'C$. 那末 $\triangle A'BC$ 的 BC 边上的中綫等于 l，并且和 $\triangle ABC$ 等积（图

3·30(4)).

注意 直綫 XY 可能和圓弧相交，相切或相离，因此本题可能有两解，一解或无解.

請讀者自己完成这个作图题的証明.

在上面的例题中，很明显地我們应用了"同底等高的三角形是等积形"的道理.下面的作图题是一个重要的等积变形的作图题.

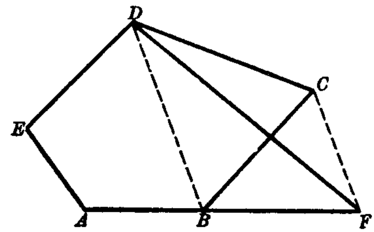


图 3·31

作图題 1 已知五边形 $ABCDE$. 求作一个和它等积的四边形(图 3·31).

【作法】 作任意一条对角綫 BD. 过頂点 C 引 $CF \parallel BD$, CF 交 AB 的延长綫于 F. 連結 DF. 四边形 $AFDE$ 就是求作的四边形.

【証】 $\because CF \parallel BD$, $\therefore$ 有同底 BD 的 $\triangle BDC$ 和 $\triangle BDF$ 有等高. 从而 $\triangle BDC$ 和 $\triangle BDF$ 等积.

四边形 $AFDE$ 的面积 = 四边形 $ABDE$ 的面积 + $\triangle BDF$ 的面积

= 四边形 $ABDE$ 的面积 + $\triangle BDC$ 的面积

= 五边形 $ABCDE$ 的面积.

利用这个作图題，我們可以把一个 n 边形化为一个和它等积的 $(n-1)$ 边形(这里 n 是一个大于 3 的自然数). 这样一步一步的利用同法做下去，最后可以化为一个和它等积的三角形.

有不少等积变形的作图題还須应用代数作图法来完成，請注意下面的两个作图題.

作图題 2 已知三角形 ABC. 求作一个和它等积的正方形(图 3·32).

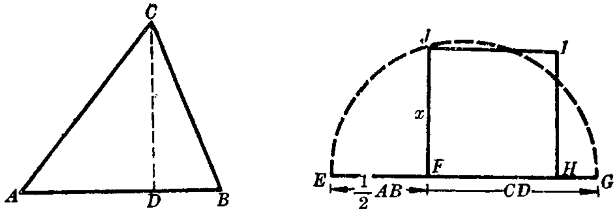


图 3 32

分析 設求作的正方形的一边为 x，那末它的面积为 x^2. 作已知三角形的高 CD，那末 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}AB\cdot CD$.

按題意有
$$x^2=\frac{1}{2}AB\cdot CD,$$
这就是
$$\frac{1}{2}AB:x=x:CD.$$

求作的正方形的一边为綫段 $\frac{1}{2}AB$ 和 CD 的比例中項.

【作法】 作三角形 ABC 的高 CD. 作綫段 $\frac{1}{2}AB$ 和 CD 的比例中項 FJ. 以 FJ 为一边作正方形 $FHIJ$. 这就是求作的正方形.

【証】 略.

把作图題 1 和作图題 2 結合起来，我們可以作出一个和 n 边形等积的正方形(这里 n 是一个大于 3 的自然数).

作图題 3 已知三角形 ABC. 求作一个和它等积的等边三角形(图 3·33).

分析 作高 CD. $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}AB\cdot CD$. 設求作的等边三角形的一边为 x，那末它的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

按題意有
$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{1}{2}AB\cdot CD,$$
就是
$$\frac{2}{3}AB:x=x:\sqrt{3}CD,$$

因此求作等边三角形的一边为綫段 $\frac{2}{3}AB$ 和 $\sqrt{3}CD$ 的比例中項.

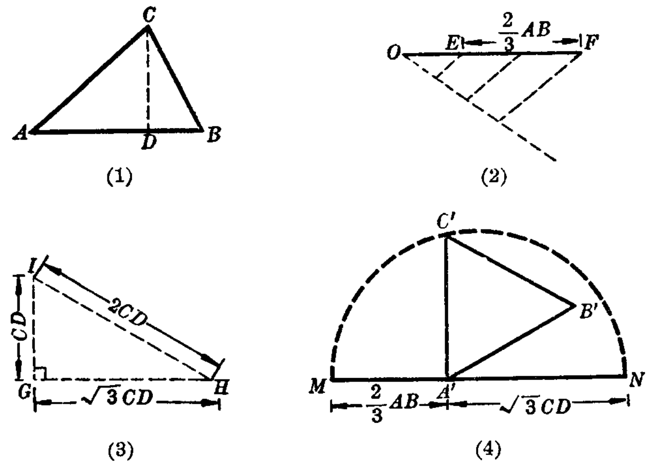


图 3·33

【作法】 作 $\triangle ABC$ 的高 CD(图 3·33(1)).

根据代数作图法基本作图题 (3) 和 (4), 作綫段 $EF=\frac{2}{3}AB$ (图 3·33(2)).

根据代数作图法基本作图题(8),作綫段

$$GH=\sqrt{(2CD)^2-CD^2}=\sqrt{3}\,CD$$

(图 3·33(3)).

作綫段 $\frac{2}{3}AB$ 和 $\sqrt{3}\,CD$ 的比例中項 $A'C'$. 以 $A'C'$ 为一边, 作等边三角形 $A'B'C'$(图 3·33(4)). 这就是求作的三角形.

【証】 三角形 $A'B'C'$ 的面积 $=\frac{\sqrt{3}}{4}A'C'^2$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3}AB\cdot\sqrt{3}\,CD$$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot CD$$

$=$三角形 ABC 的面积.

把作图題 1 和作图題 3 結合起来, 我們可以作出一个和 n 边

形等积的等边三角形(这里n是一个大于3的自然数).

例2. 已知正方形$ABCD$. 求作一个矩形,使它和已知正方形等积,并且它的周长为正方形周长的$\frac{5}{4}$(图3·34).

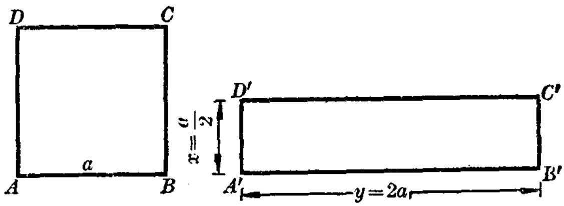


图 3·34

分析 設已知正方形$ABCD$的一边为a,它的面积和周长分别为a^2和$4a$. 設求作矩形的底和高分别为x和y,那末它的面积和周长分别为xy和$2(x+y)$. 按照題意,有

$$\begin{cases} xy=a^2, \\ 2(x+y)=\frac{5}{4}\cdot 4a. \end{cases}$$

解方程組,得

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}, \\ y=2a. \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=2a, \\ y=\frac{a}{2}. \end{cases}$$

【作法】 作矩形$A'B'C'D'$,使$A'B'=2a$, $A'D'=\frac{a}{2}$. 这就是求作的矩形.

【証】 矩形$A'B'C'D'$的面积$=A'B'\cdot A'D'$

$$=2a\cdot\frac{a}{2}$$

$$=a^2$$

$=$正方形$ABCD$的面积.

矩形$A'B'C'D'$的周长$=2(A'B'+A'D')$

$$=2\left(2a+\frac{1}{2}a\right)$$

$$=5a=\frac{5}{4}\cdot 4a.$$

$$=\frac{5}{4}\cdot \text{正方形 } ABCD \text{ 的周长}.$$

下面的一些作图题是要作出綫段，使它依照已知的規定划分一个已知多边形的面积.

作图題 4 已知三角形 ABC. 求作过頂点 A 的綫段,使它們三等分三角形 ABC 的面积(图 3·35).

【作法】 三等分 $\triangle ABC$ 的底边 BC, D 和 E 是分点. 連結 AD 和 AE. 綫段 AD 和 AE 就是求作的綫段.

【証】 $\because$ $BD=DE=EC$, $\therefore$ $\triangle ABD$, $\triangle ADE$, $\triangle AEC$ 有相等的底,同时这些三角形在底边 BD, DE, EC 上的高就是三角形 ABC 在底边 BC 上的高.

这些三角形旣有等底同高,所以它們等积. 每个三角形的面积为三角形 ABC 的面积的三分之一.

这个作图題很容易推广为"过三角形一个頂点,引綫段把三角形的面积分为 n 个等分"(这里 n 为大于 1 的自然数).

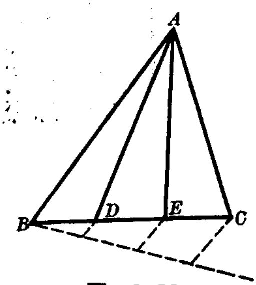


图 3·35

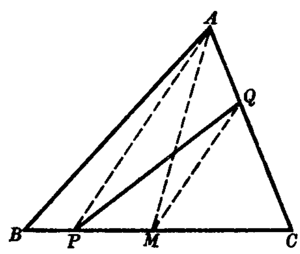


图 3·36

例 3. 已知三角形 ABC 中, P 是 BC 边上的点. 求作过 P 并且平分三角形 ABC 的面积的綫段(图 3·36).

【作法】 作 $\triangle ABC$ 边 BC 上的中綫 AM. 連結 AP, 过 M 引 $MQ /\!/ AP$, MQ 交 AC 于 Q. 連結 PQ. PQ 就是求作的綫段.

【証】 根据作图题 4 的理由，$\triangle ABM$ 的面积为 $\triangle ABC$ 的面积的二分之一.

$\because\ AP \parallel MQ,\quad \therefore\ \triangle APQ$ 和 $\triangle APM$ 等积.

$$\begin{aligned}\text{四边形 } BPQA \text{ 的面积} &= \triangle ABP \text{ 的面积} + \triangle APQ \text{ 的面积}\\ &= \triangle ABP \text{ 的面积} + \triangle APM \text{ 的面积}\\ &= \triangle ABM \text{ 的面积}\\ &= \frac{1}{2}\triangle ABC \text{ 的面积}.\end{aligned}$$

注意 如果点 P 正好是 BC 的中点，那末中綫 AP 就是求作的綫段.

作图題 5 已知 $\triangle ABC$. 求作平行于 BC 的綫段 $B'C'$，使 $B'C'$ 截得的三角形 $AB'C'$ 的面积为 $\triangle ABC$ 的面积的三分之一(图 3·37).

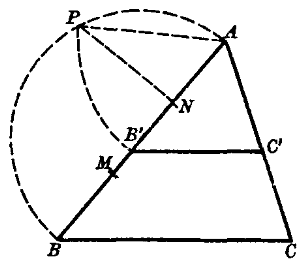


图 3·37

分析 設 $B'C'$ 为求作的綫段.

$\because\ B'C' \parallel BC,$

$\therefore\ \triangle AB'C' \backsim \triangle ABC.$

$$\therefore\ \frac{\triangle AB'C' \text{ 的面积}}{\triangle ABC \text{ 的面积}} = \frac{AB'^2}{AB^2} = \frac{1}{3}.$$

从而 $$AB' = \sqrt{\frac{1}{3}AB \cdot AB},$$

或 $$\frac{1}{3}AB : AB' = AB' : AB.$$

綫段 AB' 为綫段 $\frac{1}{3}AB$ 和 AB 的比例中項，所以它是可作的. 綫段 AB' 可作，那末 $B'C'$ 也可作了.

【作法】 三等分 AB，使 $AN = \frac{1}{3}AB$.

根据作已知綫段的比例中項的作图題，作綫段 $\frac{1}{3}AB$ 和 AB 的比例中項 AP.

在 AB 上，截 AB'，使 $AB' = AP$.

过 B' 引 $B'C' \parallel BC$，$B'C'$ 交 AC 于 C'

$B'C'$ 就是求作的綫段.

【証】 $\because\ B'C' \parallel BC,\quad \therefore\ \triangle AB'C' \backsim \triangle ABC.$

$$\therefore\ \frac{\triangle AB'C' \text{ 的面积}}{\triangle ABC \text{ 的面积}} = \frac{AB'^2}{AB^2}.$$

$$\because\ AB'^2 = \frac{1}{3}AB^2,$$

$$\therefore\ \frac{\triangle AB'C' \text{ 的面积}}{\triangle ABC \text{ 的面积}} = \frac{\frac{1}{3}AB^2}{AB^2} = \frac{1}{3}.$$

这就是 $\triangle AB'C'$ 的面积 $=\frac{1}{3}\triangle ABC$ 的面积.

这个作图题可以推广为"作已知三角形底边的平行綫,使它所截得的三角形的面积为原三角形面积的 $\frac{1}{n}$ (这里 n 为大于 1 的自然数)".

下面的一个作图题是以勾股定理作根据的.

作图题 6 已知正方形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$. 求作正方形 $A''B''C''D''$, 使它的面积等于两个已知正方形的面积的和(图 3·38).

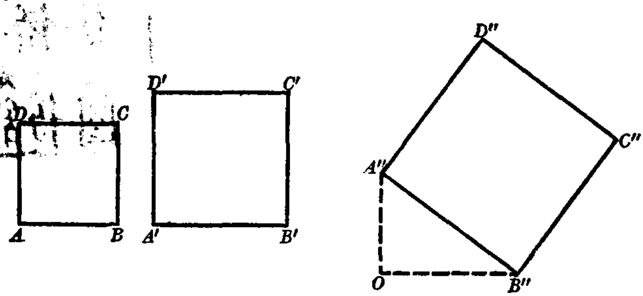


图 3·38

【作法】 作直角三角形 $A''OB''$, 使直角边 $OA''=AB$, $OB''=A'B'$. 以斜边 $A''B''$ 为一边,作正方形 $A''B''C''D''$. $A''B''C''D''$ 就是求作的正方形.

【証】 略.

这个作图题可以推广为“求作一个正方形,使它的面积等于n个已知正方形面积的和(这里n是一个大于2的自然数)”. 如果把这个作图题和作图题1,作图题2結合起来,我們可以作出一个正方形,使它的面积等于两个已知多边形面积的和.

讀者可以仿效这个作图题,仍旧根据勾股定理,作出一个正方形,使它的面积等于两个已知正方形的面积的差.

习 题 3·7

1. 在已知$\triangle ABC$上,以BC为底,作一个和$\triangle ABC$等积的三角形,使:

(1) 这个三角形的其他两条边相等;

(2) 其他两条边中的一条等于定长.

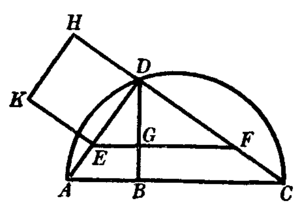
2. 作一个正方形,使它与已知三角形等积.

3. 把一个已知四边形改成一个等积的三角形.

4. 把一个已知的五边形改成一个等积的三角形,使它的底边等于五边形的一边AB.

5. 把一个已知三角形改成一个等积的矩形,使矩形的底等于定长.

*6. 作一个正方形,使它的面积与已知的一个正方形的面积的比等于$m:n$.



(第6题)

[已知: l^2是已知正方形的面积,$m:n$是定比.

求作: 一正方形,它的面积为a^2,使

$$a^2:l^2=m:n.$$

作法: 作綫段ABC,使$AB=m$, $BC=n$. 以AC为直徑作一半圓. 过B作$DB\perp AC$,交半圓于点D. 然后連接DA和DC,并在DC上截取$DF=l$. 过F作$FE\parallel AC$,交DA于E. 以DE为边作一正方形$DEKH$,这就是所要求作的正方形.

証: $\because EF\parallel AC$, $\therefore DE:DF=DA:DC$. 于是

$$DE^2:DF^2=DA^2:DC^2.$$

但 $$DA^2=AB\cdot AC,\ DC^2=BC\cdot AC,$$

$$\therefore DA^2:DC^2=AB\cdot AC:BC\cdot AC=AB:BC=m:n,$$

因此$DE^2:DF^2=m:n$. 根据作法$DF=l$, $\therefore DE^2:l^2=m:n$. 所以以

DE 为边所作出的正方形合乎条件.]

7. 作一个直角三角形,使与一已知的三角形等积.

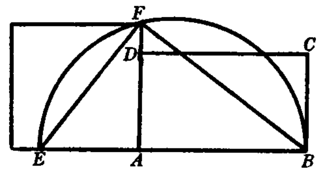
8. 作一正方形,使与一已知的梯形等积.

9. 以已知的三角形的一边为腰,作一个和这个三角形等积的等腰三角形.

10. 以 $\triangle ABC$ 的边 BC 为底,作一个和 $\triangle ABC$ 等积的三角形,使这个三角形的以 BC 为一边的一个角等于 $60°$.

11. 求作一个三角形,与一个已知三角形的一底角相同且等积,它的底边等于定长.

12. 求作一个正方形,使它和已知的矩形等积.



(第 12 题)

[已知: 矩形 $ABCD$.

求作: 一个正方形,与矩形 $ABCD$ 等积.

作法: 延长矩形的底边 BA 至 E, 使 $AE=AD$. 以 BE 为直径作半圆, 設与 AD 的延长綫交于 F, 以 AF 为边作正方形, 这个正方形就是所要求作的.

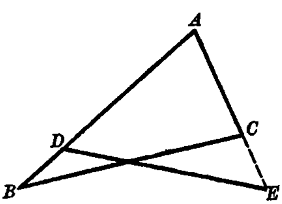
証: 根据作图, AF 是 AB 和 AE 的比例中項. 即 $AF^2=AB\cdot AE$.

$$\because \quad AE=AD,$$

$$\therefore \quad AF^2=AB\cdot AD=\text{矩形 } ABCD \text{ 的面积}.$$

这就是說,以 AF 为边所作的正方形符合条件.]

13. 过三角形的一个頂点,求作两条直綫,把三角形的面积分成 2:3:4 三部分.



(第 14 题)

*14. 以 $\triangle ABC$ 的角 A 为頂角,作一个和 $\triangle ABC$ 等积的等腰三角形.

[提示: 設 $\triangle ADE$ 是所要作的等腰三角形,由于 $\angle A$ 是公共角(如图),那末

$$\frac{\triangle ADE \text{ 的面积}}{\triangle ABC \text{ 的面积}}=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}=1.$$

但 $AE=AD$, $\therefore$ $AD^2=AB\cdot AC$, 因而 AD 可求出, 于是点 D 可定.]

15. 求作一个正方形,使它的面积等于三个巳知正方形面积的和.

16. 作平行于平行四边形对角綫的两条直綫,把平行四边形面积分为三等分.

本章提要

1. 概念 多边形的面积，面积单位，等积形，面积割补法，矩形面积定理的証明.

2. 与面积有关的性质 相似三角形面积之比定理，相似多边形面积之比定理.

3. 面积的計算 归結为下列定理的应用：矩形面积定理及其推論，平行四边形面积定理，三角形面积定理，梯形面积定理及其推論.

4. 与面积有关的作图 解等积变形的作图題(包括代数法作图在等积变形中的应用).

复习题三

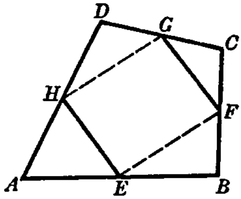
1. 已知两个正三角形的边长分别是3厘米和3分米，求等于这两个正三角形面积的和的正三角形的边长.

2. 假設 $\triangle ABC$ 的两中綫 CD 与 BE 相交于 G. M 与 N 分别是 BG 与 CG 的中点，証明以 D, E, M 和 N 为頂点的四边形面积，等于 $\triangle ABC$ 面积的三分之一.

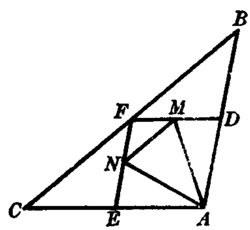
3. 如果 E, F, G, H 为四边形 $ABCD$ 各边的中点. 求証：

(1) 六边形 $EBFGDH$ 的面积 $=\dfrac{3}{4}$ 四边形 $ABCD$ 的面积；

(2) 四边形 $EFGH$ 面积 $=\dfrac{1}{2}$ 四边形 $ABCD$ 面积.



(第3题)



(第4题)

4. $\triangle ABC$ 三边的中点分别为 F, E, D; M 与 N 是 DF 与 FE 的中点. 求 $\triangle AMN$ 与 $\triangle ABC$ 面积的比.

5. 已知梯形 $ABCD$ 的两腰中点为 E, F. 求証分别以 E 和 F 为頂点而以同底为底边的两三角形等积.

6. 三角形的三高如果相等，那末它是一个正三角形.

7. 地图上的比例尺如果是 1:5000，在图上等于 3 平方厘米的一个多边形，实际地面上应有多少平方米?

8. 証明两相似平行四边形面积之比，等于它們对角綫的乘积之比.

9. 两个相似多边形面积之比，是否等于对应的对角綫平方之比? 为什么?

10. 証明有內切圓的多边形的面积，等于圓的半徑与多边形的周长之半的乘积.

11. 已知菱形的对角綫为 150 厘米和 200 厘米. 从鈍角的頂点向所对的两边分别引垂綫，并且連接两个垂足. 求所得的三角形的面积.

[提示: 要利用直角三角形中的比例中項关系.]

12. 四边形 $ABCD$ 中，对角綫 AC 和 BD 相交于 E. 延长 CA 到 F，使 $AF=CE$. 延长 DB 到 G，使 $BG=DE$. 連結 FG. 求証 $\triangle EFG$ 的面积 = 四边形 $ABCD$ 的面积.

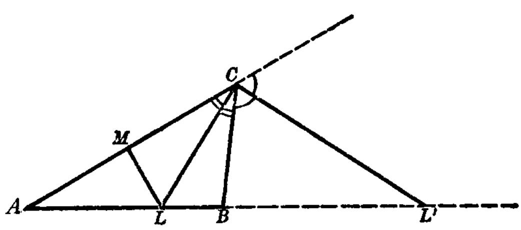
13. 已知 E, F, G, H 分别是正方形 $ABCD$ 的边 BC, CD, DA, AB 的中点. 求証 AE, BF, CG, DH 相交而成的四边形是正方形; 并且它的面积是原正方形面积的 $\frac{1}{5}$.

14. 在梯形 $ABCD$ 中，两底間的距离为 12 dm，对角綫 $BD=20$ dm，$AC=15$ dm. 求梯形的面积.

15. 在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=26$ cm，$BC=30$ cm，$CD=17$ cm，$DA=25$ cm. 对角綫 $AC=28$ cm. 求四边形 $ABCD$ 的面积.

16. 把一个正方形改成与它等积的矩形，使矩形两邻边之和 (或差) 为定长.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，$CB:CA=1:2$. 引过点 C 的內角与外角的平分綫，內角平分綫与 AB 交于点 L，外角平分綫与 AB 的延长綫交于点 L'. 求証 $\triangle BCL$ 的面积 : $\triangle ACL$ 的面积 : $\triangle ABC$ 的面积 : $\triangle CLL'$ 的面积 $=1:2:3:4$.



(第 17 題)

[証：取 CA 的中点 M,連接 LM. $\because$ $CM=\frac{1}{2}AC=BC$, CL 是 $\angle ACB$ 的平分綫. 可知 $\triangle CBL \cong \triangle CML$, 从而他們的面积相等. 又因 $\triangle CLM$ 与 $\triangle ALM$ 是等积三角形, $\therefore$ $\triangle BCL$ 的面积 : $\triangle ACL$ 的面积 $=1:2$. 那末 $\triangle BCL$ 的面积 : $\triangle ABC$ 的面积 $=1:3$.

由 $\frac{BC}{CA}=\frac{1}{2}=\frac{BL'}{AL'}$，得 $\frac{BL'}{AL'-BL'}=\frac{1}{2-1}=1$，$\therefore$ $BL'=AB$. 于是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCL'$ 有等底等高,因而它們是等积的.

$$\therefore\ \triangle BCL \text{ 的面积} : \triangle BCL' \text{ 的面积}=1:3,$$

由此可知，$\triangle BCL$ 的面积：$\triangle CLL'$ 的面积 $=1:4$. 所以

$\triangle BCL$ 的面积 : $\triangle ACL$ 的面积 : $\triangle ABC$ 的面积 : $\triangle CLL'$ 的面积 $=1:2:3:4$.]

*18. 求証：以三角形的三条中綫的长度为边的三角形的面积，等于原三角形面积的 $\frac{3}{4}$.

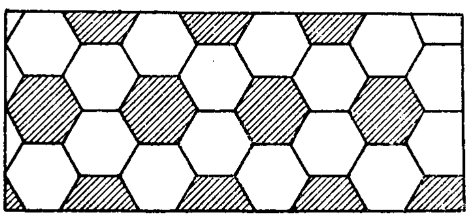
19. 求作一个梯形,使和一已知梯形相似,而且它的面积为已知梯形的2倍.

20. 如果梯形底边和对角綫所成的三角形的面积分别为 p^2 和 q^2,那末梯形的面积为 $(p+q)^2$.

第四章　正多边形

我們学习过正三角形(就是等边三角形)．正三角形的三条边都相等，三个角都相等（每个角都等于 60°）．我們也学习过正方形，正方形的四条边都相等，四个角也相等(每个角都等于 90°)．

正三角形和正方形都是特殊的多边形，它們的共同的特点是：在同一个图形里，所有的边都相等，所有的角都相等．现在我們要进一步研究：是否存在着具有上面的特点，但是边数多于 4 的多边形呢？有的，公园里八角亭的地基，会堂里舖地的花瓷磚(图 4·1)，它們的图形全是边数多于四，而且各边相等，各角相等的多边形．



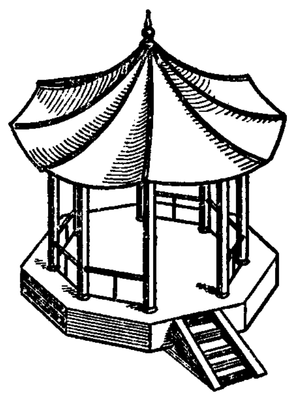


图 4·1

我們把各边相等，各角也都相等的多边形叫做**正多边形**．判定一个多边形为正多边形时，必須同时証明它的各边相等和各角相等．仅仅各边相等的多边形，象菱形，就不是正多边形；仅仅各角相等的多边形，象矩形，也不是正多边形．

一个有 n 条边的正多边形就叫正 n 边形（这里 n 是大于 2 的自然数）．但是正三边形和正四边形，我們一般叫做正三角形和正方形．应用較广的正多边形有：正三角形，正方形，正五边形，正六边形，正八边形（图 4·2）．

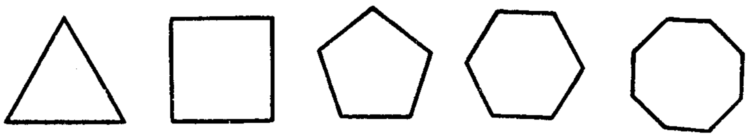


图 4·2

在这一章里，我們将研究正多边形的一般性质，关于正多边形的計算問題和某些正多边形的作图法．

§4·1 圓的內接和外切正多边形

正多边形和圓的关系非常密切，只要把一个圓分成 n 个相等的弧，我們就可作出这个圓的內接或外切正多边形．学习了下面的定理后就可明确这个事实．

圓的內接和外切正多边形定理 如果把一个圓分成 n 个等分（$n\geqslant 3$ 的自然数），那末順次連結各个分点所得的多边形是这个圓的內接正 n 边形；經过各个分点作圓的切綫，这些切綫所組成的多边形是这个圓的外切正 n 边形．

我們将以 $n=5$ 来証明这条定理．

已知 在圓 O 上，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$．$AB$, BC, CD, DE, EA 分别为順次連結分点 A, B, C, D, E 的弦．TP, PQ, QR, RS, ST 分别为經过 A, B, C, D, E 各点的切綫（图 4·3）．

求証 (1) 五边形 $ABCDE$ 是圓 O 的內接正五边形；(2) 五边形 $PQRST$ 是圓 O 的外切正五边形．

【証】 (1) 因为在同圓內等弧对等弦，現在

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA},$$

$$\therefore \quad AB=BC=CD=DE=EA,$$

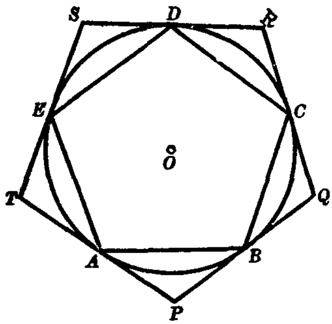


图 4·3

就是五边形 $ABCDE$ 的边都相等.

我們知道，圓周角的度数等于它所对弧的度数的一半，所以

$\angle EAB$ 的度数

$$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE})\text{的度数}$$

$$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BC})\text{的度数}$$

$$=\frac{3}{2}\overset{\frown}{BC}\text{的度数}.$$

用同样的方法，可以証明 $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDE$, $\angle DEA$ 的度数也各等于 $\frac{3}{2}\overset{\frown}{BC}$ 的度数.

$$\therefore \quad \angle EAB=\angle ABC=\angle BCD=\angle CDE=\angle DEA,$$

就是五边形 $ABCDE$ 的角都相等.

同时五边形 $ABCDE$ 的頂点 A, B, C, D, E 都在圓上. 因此它是圓 O 的內接正五边形.

(2) 因为弦切角的度数等于它所夹的弧的度数的一半，現在 $\angle PAB$ 和 $\angle PBA$ 都是弦切角，

$$\therefore \quad \angle PAB\text{ 的度数}=\angle PBA\text{ 的度数}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}\text{ 的度数}.$$

$\therefore$ $\triangle PAB$ 是等腰三角形，它的两个底角的度数各等于 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ 的度数的一半.

用同样的方法可以証明 $\triangle QBC$, $\triangle RCD$, $\triangle SDE$, $\triangle TEA$ 都是等腰三角形，它們的每一个底角的度数都等于 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ 的度数的一半.

这些等腰三角形不仅有底角相等，而且它們的底边 AB, BC, CD, DE, EA 也都相等.

因此 $\triangle PAB \cong \triangle QBC \cong \triangle RCD \cong \triangle SDE \cong \triangle TEA$，从而

$$\angle P=\angle Q=\angle R=\angle S=\angle T.$$

就是五边形 $PQRST$ 的角都相等.

因全等三角形对应边相等，

$$\therefore \quad PB=QC=RD=SE=TA,$$
$$BQ=CR=DS=ET=AP.$$

将上面两式相加，得

$$PQ=QR=RS=ST=TP,$$

即五边形 $PQRST$ 的边都相等.

五边形 $PQRST$ 的每一条边都是圆 O 的切綫，因此它是圆 O 的外切正五边形.

例 1. 求証圆的内接等边多边形一定是正多边形.

我們以圆的内接等边五边形为例来証明.

已知 五边形 $ABCDE$ 内接于圆 O，并且 $AB=BC=CD=DE=EA$（图 4·4）.

求証 五边形 $ABCDE$ 为正多边形.

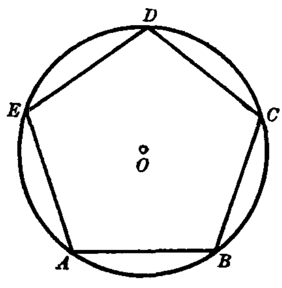


图 4·4

【証】 因为同圆内等弦对等弧，现在 $AB=BC=CD=DE=EA$，

$$\therefore \quad \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA},$$

即点 A, B, C, D, E 把圆 O 分成五个等分. 根据前面的定理可以断定，順次連結这些分点的五边形 $ABCDE$ 是正五边形.

例 2. 求証圆的外切等角多边形一定是正多边形.

我們以圆的外切等角五边形为例来証明.

已知 五边形 $PQRST$ 外切于圆 O；A, B, C, D, E 分别为边 PQ, QR, RS, ST, TP 的切点. $\angle P=\angle Q=\angle R=\angle S=\angle T$（图 4·5）.

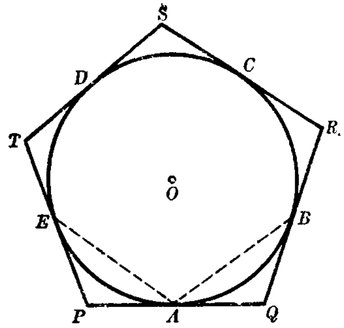


图 4·5

求証 五边形 $PQRST$ 为正多边形.

【証】 連結 EA 和 AB. 因为从圓外一点到圓的两条切綫的长相等,

$$\therefore \quad PE=PA,$$

从而 $\triangle PAE$ 为等腰三角形，它的底角之一

$$\angle PAE=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle P).$$

用同样方法,可得 $\angle QBA=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle Q)$.

$$\because \quad \angle P=\angle Q, \qquad \therefore \quad \angle PAE=\angle QBA.$$

現在 $\angle PAE$ 和 $\angle QBA$ 都是弦切角. 根据“弦切角的度数等于它所夹的弧的度数的一半”的理由,可以推得

$$\angle PAE \text{ 的度数}=\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{EA} \text{ 的度数},$$

$$\angle QBA \text{ 的度数}=\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{BA} \text{ 的度数}.$$

$$\therefore \quad \overset{\frown}{EA}=\overset{\frown}{AB}.$$

用同样方法可証, $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$.

$\therefore$ 点 A, B, C, D, E 把圓 O 分成五个等分.

根据前面的定理,經过这些分点作圓的切綫,这些切綫所組成的多边形 $PQRST$ 是正多边形.

例 3. 作垂直于圓內接正多边形的各边的半徑，并且經过所作各半徑的外端作圓的切綫，那末这些切綫組成一个圓外切正多边形.

我們将以正六边形为例进行証明.

已知 圓 O 和它的內接正六边形 $ABCDEF$. 半徑 OM',

ON', OP', OQ', OR', OS' 分别垂直于 AB, BC, CD, DE, EF, FA; 它們的垂足各为 M, N, P, Q, R, S. 过 M', N', P', Q', R', S' 引圓 O 的切綫, 这些切綫組成六边形 $A'B'C'D'E'F'$(图 4·6).

求証 六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 为正六边形.

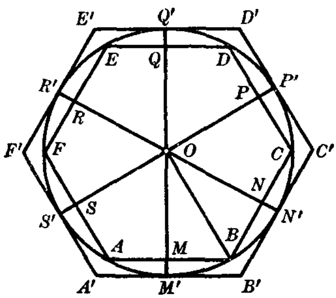


图 4·6

【証】 因为切綫垂直于經过切点的半徑, $\therefore A'B' \perp OM'$.

因为 AB 和 $A'B'$ 都垂直于 OM', $\therefore AB \parallel A'B'$.

用同法可証, $AF \parallel A'F'$.

两边对应平行(都是同向平行或都是反向平行)的两角必相等, $\therefore \angle A' = \angle A$.

用同法可証得: $\angle B' = \angle B$, $\angle C' = \angle C$, $\angle D' = \angle D$, $\angle E' = \angle E$, $\angle F' = \angle F$.

多边形 $ABCDEF$ 为正多边形, $\therefore \angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$, $\angle F$ 都相等, 从而 $\angle A'$, $\angle B'$, $\angle C'$, $\angle D'$, $\angle E'$, $\angle F'$ 也都相等.

根据例 2, "圓的外切等角多边形一定是正多边形," 所以多边形 $A'B'C'D'E'F'$ 为正六边形.

例 4. 試証圓內接奇数边等角多边形一定是正多边形.

我們以五边形为例来进行証明, 对于其它奇数边的多边形, 可以用同样的方法来証明.

已知 在圓 O 的內接五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 里, $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \angle A_4 = \angle A_5$(图 4·7).

求証 五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 是正五边形.

分析 要証五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 是正五边形, 只要証明点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 把圓 O 分成五等分就可以了.

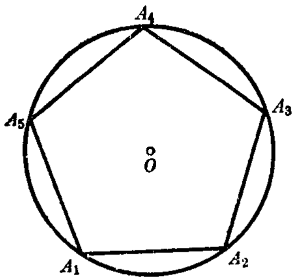


图 4·7

【証】 因为圆周角的度数等于它所对的弧的度数的一半，所以

$\angle A_1$ 的度数

$$=\frac{1}{2}(\widehat{A_2A_3}+\widehat{A_3A_4}+\widehat{A_4A_5})\text{ 的度数，}$$

$\angle A_2$ 的度数

$$=\frac{1}{2}(\widehat{A_3A_4}+\widehat{A_4A_5}+\widehat{A_5A_1})\text{ 的度数.}$$

$\because\quad \angle A_1=\angle A_2$，

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(\widehat{A_2A_3}+\widehat{A_3A_4}+\widehat{A_4A_5})=\frac{1}{2}(\widehat{A_3A_4}+\widehat{A_4A_5}+\widehat{A_5A_1}),$$

即
$$\widehat{A_2A_3}=\widehat{A_5A_1}.$$

用同法証得 $\widehat{A_3A_4}=\widehat{A_1A_2}$，$\widehat{A_4A_5}=\widehat{A_2A_3}$，$\widehat{A_5A_1}=\widehat{A_3A_4}$. 比較这些等式，得

$$\widehat{A_1A_2}=\widehat{A_2A_3}=\widehat{A_3A_4}$$
$$=\widehat{A_4A_5}=\widehat{A_5A_1}.$$

$\therefore$ 五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 为正多边形.

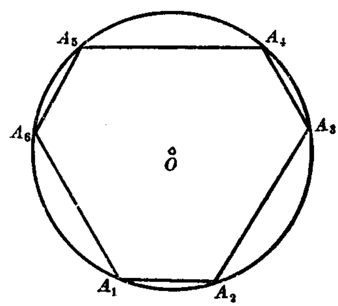


图 4·8

注意 圆內接偶数边等角多边形不一定是正多边形，在图 4·8 里，圆 O 的內接六边形是等角的，但不是等边的.

习 题 4·1

1. 求下列各正多边形每一內角的度数：

(1) 正五边形；　(2) 正六边形；

(3) 正八边形；　(4) 正十边形；

(5) 正十二边形；　(6) 正十五边形.

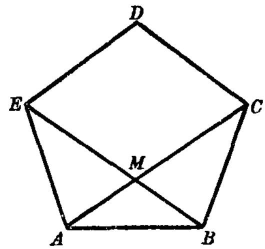
2. 求上題各正多边形的外角的度数.

3. 求証正五边形的对角綫相等.

*4. 如图. 正五边形的对角綫 AC 和 BE 相交于 M.

求証：$ME=AB$；且 $ME^2=BE\cdot BM$.

[提示：$\triangle ABC \backsim \triangle AMB$.]



(第4題)

5．証明在圓內接正六边形中，最长的对角綫等于圓的直徑.

6．延长一个已知的正五边形的各边，相交而成一个五角星形．証明这个五角星形的各边都相等.

7．BE是正五边形 $ABCDE$ 的一条对角綫，証明它必与正五边形的一边 CD 平行.

8．如果圓中的一条弦垂直平分这圓的某一条半徑，那末这弦等于圓的內接正三角形的一边.

9．在正六边形的各边上，向形外分别作六个正方形．証明这些正方形外面的那十二个頂点，是正十二边形的頂点.

10．把一个已知圓分成四等分，并过各分点作出圓的內接和外切的正方形.

§4·2 正多边形的外接圓和內切圓

以圓的內接和外切正多边形定理为根据，只要我們能够 n 等分一个圓，就可作出这个圓的內接和外切正多边形．反过来，每一个正多边形是不是都有一个內切圓和外接圓呢？下面的定理将答复这个問題.

正多边形的外接圓和內切圓定理 任何正多边形都有一个外接圓和一个內切圓；这两个圓是同心圓.

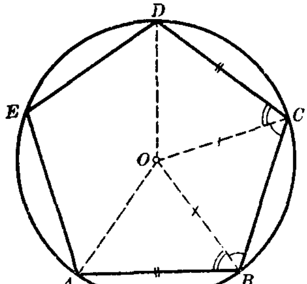


图 4·9

我們将以正五边形来进行証明.

已知 正五边形 $ABCDE$（图 4·9）.

求証 (1) 正五边形 $ABCDE$ 有一个外接圓；(2) 正五边形 $ABCDE$ 有一个內切圓，它的圓心就是外接圓的

圆心.

分析 要証明正多边形 $ABCDE$ 有一个外接圓，只要証明正多边形的頂点 A, B, C, D, E 是同一个圓的点，这就是要証明这些頂点和某一个点的距离相等. 为此，过 A, B, C 三点先作一个圓，如果能够証明圓心 O 和所有的頂点等距，那末点 O 就是外接圓的圓心.

要証明正多边形 $ABCDE$ 有一个內切圓，只要証明正多边形的边 AB, BC, CD, DE, EA 到某一个点的距离相等，这个点就是內切圓的圓心. 从本題的求証部分看来，这个点就是 O.

【証】 (1) 經过 A, B, C 三点作圓，它的圓心是 O. 連結 OA, OB, OC, OD.

在 $\triangle OBC$ 中，OB, OC 是同圓的半徑，所以它們相等，$\triangle OBC$ 是等腰三角形.

从而

$$\angle OBC = \angle OCB. \tag{1}$$

但

$$\angle ABC = \angle BCD. \tag{2}$$

(2)式减去(1)式，得

$$\angle ABC - \angle OBC = \angle BCD - \angle OCB,$$

即

$$\angle ABO = \angle OCD.$$

在 $\triangle OAB$ 和 $\triangle ODC$ 中，

$$AB = DC,$$

$$\angle ABO = \angle DCO,$$

$$OB = OC,$$

$$\therefore \quad \triangle OAB \cong \triangle ODC,$$

$$OA = OD.$$

$\therefore$ 頂点 D 在圓 O 上.

用同样方法可以証明頂点 E 也在圓 O 上.

$\therefore$ 正五边形 $ABCDE$ 有一个外接圓.

(2) 因为正多边形的边都相等，所以 $AB = BC = CD = DE$

$=EA$. 但是这些边同时又是外接圓 O 的弦，根据"同圓里，等弦的弦心距相等"的理由，可知外接圓心 O 到 AB, BC, CD, DE, EA 的距离都相等.

因此以 O 为圓心，以点 O 到 AB 的距离为半徑所作的圓和 AB, BC, CD, DE, EA 都相切.

$\therefore$ 正五边 $ABCDE$ 有一个內切圓，它的圓心就是同一多边形的外接圓的圓心.

我們把一个正多边形的外接圓和內切圓的公共圓心，叫做正多边形的**中心**，外接圓半徑叫做正多边形的**半徑**，內切圓的半徑叫做正多边形的**边心距**. 正多边形每一边所对的外接圓的圓心角，叫做正多边形的**中心角**.

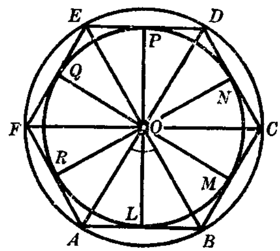
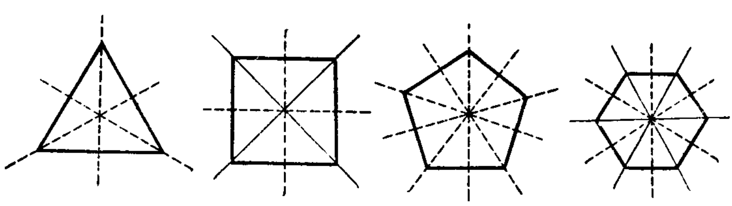


图 4·10

在图 4·10 里，六边形 $ABCDEF$ 是一个正六边形，O 是它的中心，OA(或 OB, OC, $\cdots$)是它的半徑，OL (或 OM, ON, $\cdots$) 是它的边心距，$\angle AOB$ (或 $\angle BOC$, $\angle COD$, $\cdots$)是它的中心角.

我們把一个正多边形的边，角，半徑，边心距，中心角等叫做这个正多边形的各元素.

正多边形都是軸对称图形，一个正 n 边形一共有 n 条对称軸，每一条对称軸都通过正多边形的中心 (图 4·11). 如果一个正多边形有偶数条边，那末它又是中心对称图形，它的中心就是对称中心(图 4·11(2)(4)).



(1) (2) (3) (4)

图 4·11

习 題 4·2

1. 証明在正多边形中：(1)中心角皆相等；(2)每一外角也相等；(3)中心角与外角相等.

2. 求証：正三角形的边心距等于它的高的三分之一，或等于外接圓半徑的二分之一.

3. 証明正三角形的边心距、半徑和高的比为 $1:2:3$.

[提示：参考上題的結果.]

4. 如果正多边形的中心为 O，順次相連的三边为 AB，BC 和 CD. AB 与 DC 的延長綫相交于 E. 那末四边形 $OAEC$ 和 $ODEB$ 都各有一个外接圓.

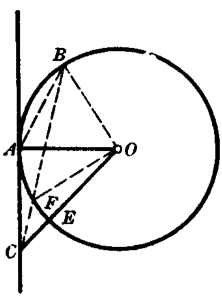
5. 利用§4·2的定理，証明正多边形各角的平分綫交于同一点，这一点距各頂点等远，距各边也等远.

6. 如果圓的外切等边多边形的边数为奇数，那末这是一个正多边形.

7. 已知正多边形的边長为 a，边心距为 r. 求半徑 R.

8. 設正 n 边形的边長为 a，当 n 为下列数值时，求它的边心距 r 和半徑 R：(1) $n=3$；(2) $n=4$；(3) $n=6$.

9. 如果一个多边形有一个外接圓和一个內切圓，并且这两个圓是同心圓，那末这个多边形是正多边形.



(第12題)

10. 証明同圓的內接正 n 边形和外切正 n 边形周長的比，等于內接正 n 边形的边心距和半徑的比.（参閱§4·1例3的图4·6.）

11. 試就图4·11的(3)和(4)两种情况，証明正多边形的各个角的平分綫所在直綫，以及它的各条边的垂直平分綫都是它的对称軸.

*12. 如图. 直綫 AC 切圓 O 于 A. B 在圓 O 上，且 $AB=AC=AO$. OC 与 BC 分别交圓 O 于 E，F. 求証 EF 是圓內接正二十四边形的一边.

[提示：从已知条件，找出图中三角形的角的关系，証明 $\angle EOF=15°$.]

§4·3 关于正多边形的計算題

在正多边形的計算題里，我們习慣上用：

n 表示一个正多边形的边数，并且 $n \geqslant 3$；

a_n 表示一个正 n 边形的一条边的长度；

α_n 表示一个正 n 边形的一个中心角的度数；

p_n 表示一个正 n 边形的周长，显然 $p_n = na_n$；

R 表示一个正多边形的半徑的长度；

r 表示一个正多边形的边心距的长度.

最簡单的計算題是已知正多边形的边数，求它的內角和中心角.

我們学习过：一个 n 边形的 n 个內角的和等于 $(n-2)\cdot 180°$. 根据"正多边形的角都相等"的理由，我們有：

$$\textbf{正 } \boldsymbol{n} \textbf{ 边形的一个內角} = \frac{(n-2)180°}{n}.$$

根据习題 4·2 第 1 題(1)，"正 n 边形的 n 个中心角都相等"，我們有：

$$\textbf{正 } \boldsymbol{n} \textbf{ 边形的中心角的度数 } \alpha_n = \frac{360°}{n}.$$

下面的定理，在解正多边形的計算題时經常要用到.

半徑和边心距分正多边形为全等三角形定理 正 n 边形的半徑和边心距把正 n 边形分成 $2n$ 个全等的直角三角形.

我們以正六边形为例来証明.

已知 $OA, OB, OC, \cdots$ 和 $OL, OM, ON, \cdots$ 分别为正六边形 $ABCDEF$ 的半徑和边心距(图 4·12).

求証 直角三角形 $OAL, OBL, OBM, OCM, \cdots$ 全等.

【証】 因为在一个正多边形里，所有的边心距都相等，所有的半徑也都相等，所以在直角三角形 $OAL, OBL, OBM, OCM, \cdots$ 中，

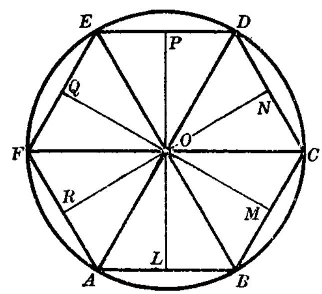


图 4·12

它們有直角边 $OL, OM, \cdots$ 对应相等,还有斜边 $OA, OB, OC, \cdots$ 对应相等.

根据直角三角形全等判定定理3, 直角三角形 $OAL, OBL, OBM, OCM, \cdots$ 全等.

因为正六边形的每一条边上有两个直角三角形, 所以这些全等的直角三角形一共有 12 个.

应用这条定理, 我們可以把正 n 边形的計算問題归結为直角三角形的計算問題;这些直角三角形 (象直角三角形 OAL) 的一条直角边 (OL) 是正 n 边形的边心距 r, 另一条直角边 (AL) 是正 n 边形的边 a_n 的一半, 它的斜边 (OA) 是正 n 边形的半徑 R, 一个銳角 $(\angle AOL)$ 的度数是正 n 边形的中心角度数 α_n 的一半.

对这些直角三角形,应用勾股定理,可得

$$R^2=r^2+\left(\frac{a_n}{2}\right)^2.$$

正多边形面积定理 正多边形的面积等于它的周长和边心距乘积的一半.

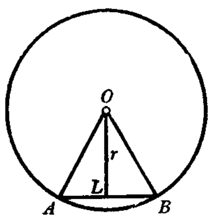


图 4·13

已知 正 n 边形的周长 p_n 和边心距 r (图 4·13).

求証 **正 n 边形的面积 $=\frac{1}{2}p_nr$.**

【証】 設 AB 为已知正 n 边形的一边 a_n, OB 和 OL 分别为半徑和边心距 r. 那末

$$LB=\frac{1}{2}a_n.$$

$$\text{直角三角形 } OLB \text{ 的面积}=\frac{1}{2}OL\cdot LB$$

$$=\frac{1}{2}r\cdot\frac{a_n}{2}=\frac{1}{4}a_nr,$$

因为正 n 边形被半徑和边心距分为 $2n$ 个和 $\triangle OLB$ 全等的直角三角形,所以它的面积为直角三角形 OLB 的面积的 $2n$ 倍,因此

$$\text{正 } n \text{ 边形的面积} = 2n\left(\frac{1}{4}a_n r\right)$$

$$= \frac{1}{2}(na_n)r$$

$$= \frac{1}{2}p_n r.$$

例 1. 已知正三角形，正方形，正六边形的外接圓的半徑为 R，求它們一边的长和面积.

【解】 (1) 作正三角形 ABC 的边心距 OL 和外接圓的半徑 OB (图 4·14)，得直角三角形 OLB.

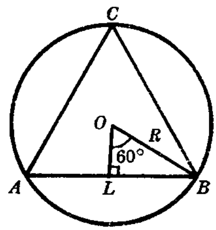


图 4·14

$$\because \quad \angle LOB = \frac{1}{2}\alpha_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{360°}{3}\right) = 60°,$$

$$\therefore \quad \angle LBO = 30°.$$

在含有 30° 角的直角三角形里，30° 角所对的边等于斜边的一半，

$$\therefore \quad OL = \frac{1}{2}R.$$

应用勾股定理，得

$$a_3 = 2LB = 2\sqrt{OB^2 - OL^2}$$

$$= 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{3}\,R.$$

$$\therefore \quad p_3 = 3a_3 = 3\sqrt{3}\,R,$$

$$\because \quad r = OL = \frac{1}{2}R,$$

$$\therefore \quad \text{正三角形 } ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2}p_3 r$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{3}\,R\cdot\frac{1}{2}R$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

(2) 作正方形 $ABCD$ 的边心距 OL 和外接圆的半徑 OB (图 4·15)，得直角三角形 OLB.

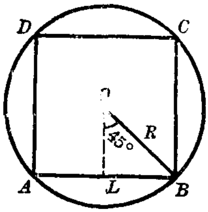


图 4·15

$$\because \quad \angle LOB=\frac{1}{2}\alpha_4=\frac{1}{2}\left(\frac{360^\circ}{4}\right)=45^\circ,$$

$$\therefore \quad \angle LBO=45^\circ,$$

$$OL=LB.$$

应用勾股定理，得

$$OL^2+LB^2=OB^2,$$

$$2LB^2=OB^2,$$

$$LB=\sqrt{\frac{OB^2}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}R.$$

$$\therefore \quad a_4=2LB=\sqrt{2}\,R,$$

$$\therefore \quad p_4=4a_4=4\sqrt{2}\,R.$$

$$\because \quad r=OL=\frac{\sqrt{2}}{2}R,$$

$$\therefore \quad \text{正方形 } ABCD \text{ 的面积}=\frac{1}{2}p_4r$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\,R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}R$$

$$=2R^2.$$

(3) 作正六边形 $ABCDEF$ 的边心距 OL 和外接圆的半徑 OB(图 4·16)，得直角三角形 OLB.

$$\because \quad \angle LOB=\frac{1}{2}\alpha_6$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{360^\circ}{6}\right)=30^\circ,$$

$$\therefore \quad LB=\frac{1}{2}R.$$

$$a_6=2LB=2\cdot\frac{1}{2}R=R,$$

$$\therefore \quad p_6=6a_6=6R.$$

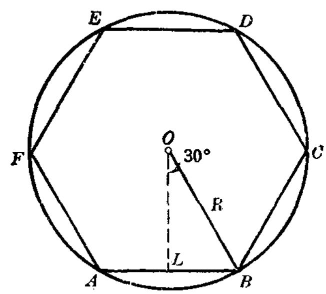


图 4·16

$$r = OL = \sqrt{OB^2 - LB^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} R.$$

$\therefore$ 正六边形 $ABCDEF$ 的面积 $= \frac{1}{2} p_6 r$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2.$$

正多边形相似判定定理 边数相等的正多边形相似.

今以正六边形为例进行証明,其他的正 n 边形,可用同样方法証明.

已知 正多边形 $ABCDEF$ 和 $A'B'C'D'E'F'$ 的边数都等于 6(图 4·17).

求証 正多边形 $ABCDEF \backsim$ 正多边形 $A'B'C'D'E'F'$.

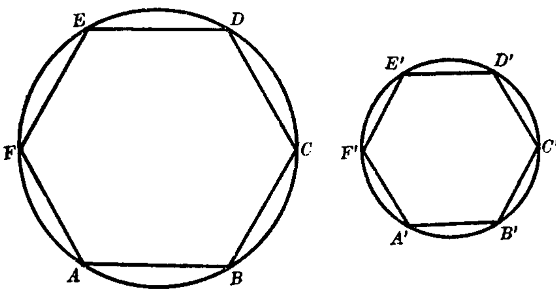


图 4·17

【証】 因为正多边形的角都相等, 并且每个角都等于 $\frac{(6-2)180^\circ}{6}$, 所以

$$\angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C', \cdots.$$

因为正多边形的边都相等, 所以 $AB = BC = CD = \cdots$, $A'B' = B'C' = C'D' = \cdots$, 从而

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \cdots.$$

因为正六边形 $ABCDEF$ 和 $A'B'C'D'E'F'$ 的对应角相等，对应边成比例，所以

$$\text{正六边形 } ABCDEF \backsim \text{正六边形 } A'B'C'D'E'F'.$$

关于相似多边形的性质，有两点現在值得重提一下：(1) 相似多边形的对应綫段（象周长，对应的对角綫等）的比等于它們的相似比（就是对应边的比）；(2) 相似多边形的面积比等于它們相似比的平方（就是对应边的比的平方）．相似的正多边形当然也有同样的性质，并且它們的半徑和边心距都可以看做对应綫段．因此依据正多边形相似判定定理，再結合相似多边形的这些性质，我們有下面的两条推論：

推論 1 边数相同的正多边形的周长的比，半徑的比或边心距的比各等于它們的边的比．

推論 2 边数相同的正多边形的面积的比等于它們边的比的平方，周长的比的平方，半徑的比的平方或边心距的比的平方．

請讀者自己証明这两条推論．

例 2．已知圓 O 的半徑是 R，它的內接正 n 边形的边长为 a_n．求这个圓的外切正 n 边形的边长和这两个正多边形的面积的比．

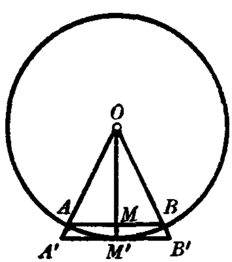


图 4·18

【解】 (1) 設 AB 和 $A'B'$ 分别是圓 O 的內接和外切正 n 边形的一边，OM 和 OM' 分别是它們的边心距．再設 $A'B'=a_n'$（图 4·18）．

因为这两个正多边形的边数同为 n，所以根据推論 1，得

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OM'}{OM}. \tag{1}$$

根据勾股定理，有 $OM=\sqrt{OA^2-AM^2}$．代入(1)式，得

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OM'}{\sqrt{OA^2-AM^2}},$$

就是

$$\frac{a_n'}{a_n}=\frac{R}{\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}},$$

$$a_n'=\frac{2Ra_n}{\sqrt{4R^2-a_n^2}}.$$

(2) 依据推論 2, 有

$$\frac{\text{圓}O\text{內接正}n\text{边形的面积}}{\text{圓}O\text{外切正}n\text{边形的面积}}=\frac{a_n^2}{a_n'^2}$$

$$=\frac{a_n^2}{\left(\frac{2Ra_n}{\sqrt{4R^2-a_n^2}}\right)^2}$$

$$=\frac{4R^2-a_n^2}{4R^2}.$$

关于正多边形的計算問題，介紹下面的倍边公式和这条公式的推导过程.

已知圓 O 的半徑为 R，它的內接正 n 边形的一边为 a_n，那末圓 O 的內接正 $2n$ 边形的一边 a_{2n} 可由下面的公式計算而得：

$$\boldsymbol{a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}}},$$

这里 n 是不小于 3 的自然数. 这个公式簡称为**倍边公式**.

【証】 在图 4·19 里，$AB=a_n$ 是圓 O 的內接正 n 边形的一边，$OA=R$.

作 AB 的垂直平分綫，平分 AB 于 D，根据"弦的垂直平分綫經过圓心，并且平分这条弦所对的两条弧"，所作的直綫一定經过圓心 O 和 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 C，連結 AC.

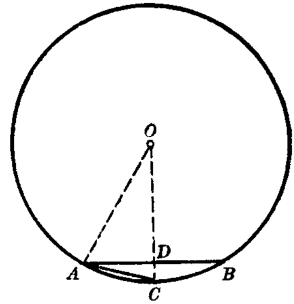


图 4·19

因为 AB 是圓 O 的內接正 n 边形

的一边，它所对的 $\overset{\frown}{AB}$ 是全圆的 $\dfrac{1}{n}$，显然 $\overset{\frown}{AC}$ 是全圆的 $\dfrac{1}{2n}$，从而 AC 是圆 O 内接正 $2n$ 边形的一边．即 $AC=a_{2n}$.

因为 n 是不小于 3 的自然数，所以 $\overset{\frown}{AC}$ 不大于全圆的 $\dfrac{1}{6}$，从而 $\angle AOC$ 总是一个銳角．

对 $\triangle OAC$ 应用勾股定理的推广，

$$AC^2=OA^2+OC^2-2OC\cdot OD,$$

就是

$$a_{2n}^2=2R^2-2R\cdot OD. \tag{1}$$

对直角三角形 OAD 应用勾股定理，

$$OD=\sqrt{OA^2-AD^2},$$

就是

$$OD=\sqrt{R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}. \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式，得

$$a_{2n}^2=2R^2-2R\cdot\sqrt{R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2},$$

就是

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}}.$$

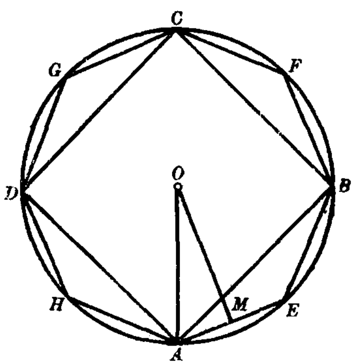


图 4·20

例 3. 已知圆的半徑是 R. 求这个圆的内接正 8 边形的边长，边心距和面积．

【解】 在图 4·20 里，AB 和 AE 分别为圆 O 的内接正四边形和正八边形的一边，OM 是正八边形的边心距，OA 是半徑．

依据 § 4·3 例 1，$a_4=AB=\sqrt{2}\,R$. 再应用倍边公式：

$$a_8 = AE = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_4^2}}$$

$$= \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - (\sqrt{2}\ R)^2}}$$

$$= \sqrt{2 - \sqrt{2}}\ R.$$

对直角三角形 OAM，应用勾股定理，

$$r = OM = \sqrt{OA^2 - AM^2}$$

$$= \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}AE\right)^2}$$

$$= \sqrt{R^2 - \left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}R\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}R.$$

圆 O 的内接正八边形的面积 $= \frac{1}{2}p_8 r$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2 - \sqrt{2}}\ R \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}R$$

$$= 2\sqrt{2}\ R^2.$$

答：圆 O 的内接正八边形的一边为 $\sqrt{2 - \sqrt{2}}\ R$，边心距为 $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}\ R$，面积为 $2\sqrt{2}\ R^2$.

例 4. 已知圆 O 的半径为 R. 求这个圆的内接正 12 边形的边长.

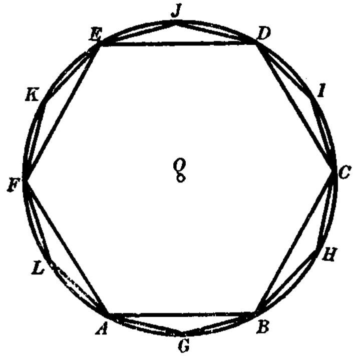


图 4·21

【解】 在图 4·21 里，AB 和 AG 分别是圆 O 的内接正六边形和正十二边形的一边.

根据 § 4·3 例 1，$AB = a_6 = R$，应用倍边公式，

$$
\begin{aligned}
AG=a_{12}&=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_6^2}}\\
&=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-R^2}}\\
&=\sqrt{2-\sqrt{3}}\,R.
\end{aligned}
$$

例 5. 已知圓O的內接正$2n$边形的一边为a_{2n}，半徑为R. 求这个圓的內接正n边形的边a_n.

【解】 从倍边公式$a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}}$解$a_n$，得

$$a_n=\frac{1}{R}\sqrt{4R^2a_{2n}^2-a_{2n}^4}=\frac{a_{2n}}{R}\sqrt{4R^2-a_{2n}^2}.$$

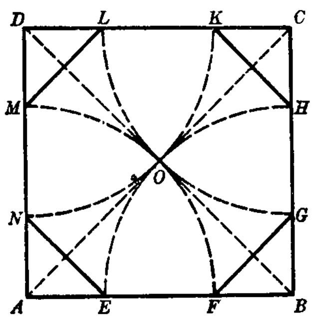
习 題 4·3

1. 求內接于直徑为 2 分米的圓中的正三角形一边的长.

2. 一块直徑为 4 分米长的圓木板，可以鋸成每边多长的正方形木板？

3. 求証：圓內接正六边形的面积，等于同圓外切正六边形的面积的四分之三.

[提示：参考本节的例 2.]



(第 4 題)

4. 以边长为$2a$的正方形的各頂点为圓心，用对角綫的一半为半徑作弧与各边相交，順次連接各交点，証明所得到的是一个正八边形，并計算它的面积.

[証：順次連接弧与各边交点所得到的八边形，設为$EFGHKLMN$(如图). 已知$ABCD$这个正方形的边长为$2a$，那末，由勾股定理可求出对角綫之半，应为$\sqrt{2}a$. 于是图中$AE=AB-BE=(2-\sqrt{2})a$，$EF=AB-AE-BF=AB-2AE=2a-2(2-\sqrt{2})a=2(\sqrt{2}-1)a$，$EN=\sqrt{AE^2+AN^2}=\sqrt{2}AE=\sqrt{2}(2-\sqrt{2})a=2(\sqrt{2}-1)a$. 可知八边形的各边均为$2(\sqrt{2}-1)a$；另一方面，八边形的各角皆是等腰直角三角形的外角，它們各等于 135°. 按照定义，$EFGHKLMN$是一个正八边形.

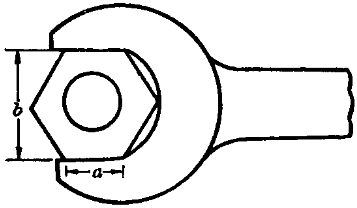
显然可見，这个正八边形的边心距是正方形$ABCD$的边长之半. 就是$r=a$，周长$p_8=16(\sqrt{2}-1)a$，所以它的面积$S=8(\sqrt{2}-1)a^2$.]

5. 把边长为a的正八边形的相間的四条边的中点相連，証明得到的是

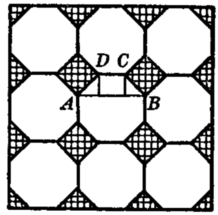
一个正方形，并計算它的边长.

6．已知圓内接正多边形的半徑为 R，边心距为 r，面积为 Q. 求同圓的边数相同的外切多边形的面积.

7．設螺絲帽为正六边形，它的每边长 $a=18\ \mathrm{mm}$，螺絲扳头和螺絲帽之間共留空隙 $0.3\ \mathrm{mm}$. 求出这个扳头的开口 b 的长.



(第7題)

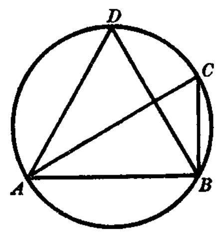


(第9題)

8．用全等的正多边形的磚鋪地面，要每两块之間都不留空地，問：(1)有哪几种正多边形的磚合用？(2)已知房間的面积是40平方米，試計算需用每边长是18厘米的正六边形的磚多少块.

9．假設一个图案是由正八边形(白色)与正方形(黑色)所組成. 正方形的边等于2厘米，求正八边形两对边之間的距离 AB(附图).

10．圓内接三角形的一边等于内接正三角形的一边，另一边是内接正六边形的一边. 求証这个三角形的面积与内接正三角形面积的比为 $\frac{2}{3}$.



(第10題)

[証：設 $\triangle ABD$ 为圓内接正三角形，$\triangle ABC$ 为内接三角形. 又設圓的半徑为 R，应有

$$AB=BD=DA=\sqrt{3}\,R,$$

$$\triangle ABD \text{ 的面积}=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}R)^2=\frac{3}{4}\sqrt{3}\,R^2.$$

在 $\triangle ABC$ 中，由已知条件知 $\angle C$ 与 $\angle BAC$ 分别对 120° 与 60° 的弧，

$$\therefore\quad \angle C=60^\circ,\qquad \angle BAC=30^\circ.$$

由此可知 $\triangle ABC$ 为直角三角形，它的两直角边分别为

$$AB=\sqrt{3}R,\quad BC=R.$$

$$\therefore\quad \triangle ABC \text{ 的面积}=\frac{\sqrt{3}}{2}R^2.$$

从而得到

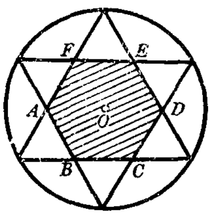
$$\triangle ABC \text{ 的面积}:\triangle ABD \text{ 的面积}=\frac{\sqrt{3}}{2}R^2:\frac{3}{4}\sqrt{3}\,R^2=2:3.]$$

11. 設正三角形的內切圓半徑 r 和外接圓半徑 R 的差为 d，試求三角形的边长和面积.

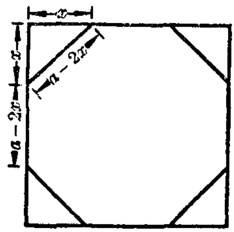
*12. 用計算来証明圓內接正六边形的面积等于同圓內接正三角形面积的两倍，又为同圓內接及外切正三角形面积的比例中項.

13. 将半徑为 R 的圓 O 分为六等分，并将各分点每隔一个用弦連結，相交而成六边形 $ABCDEF$(如图). 求这六边形各边的长.

14. 已知边长为 a 的正方形，怎样削去四角，使它成为一个正八边形？[提示：参考第 4 题，求出图中 x 的长.]



(第 13 題)



(第 14 題)

15. 已知 $a_6=R$. 由倍边公式求 a_{12} 及 a_3.

16. 已知 $a_4=\sqrt{2}\,R$，求 a_8 及 a_{16}.

17. 已知正十二边形的半徑为 R，求它的面积.

18. 已知一圓的內接正 n 边形，求証这圓的內接正 $2n$ 边形的周长大于已知的內接正 n 边形的周长.

19. 如果和半徑为 R 的圓相外切的有 n 个相等的圓，并且它們每相邻的两个也互相外切，試在 $n=3, 4, 6$ 时，分別求出这些圓的半徑.

20. 在正六边形中，如果分別过相間的頂点引对角綫，那末它們就圍成一个正六边形.

§ 4·4 正多边形的作图

我們学习过正多边形的性质之后，容易体会出正多边形的作图問題，实质上就是等分圓的問題. 只要应用圓規和直尺能够 n 等分一个圓，那末順次連結各个分点，所得的多边形就是这个圓的內接正 n 边形.

作图題 1 已知圓 O，求作这个圓的內接正六边形(图 4·22).

分析 求作圓 O 的內接正六边形，首先应当六等分这个圓. 設 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 是圓 O 的 $\frac{1}{6}$，連結 A_1A_2，A_1A_2 就是求作的正六边形的一边. 連結半徑 OA_1 和 OA_2，在等腰三角形 OA_1A_2 中，

$$\angle A_1OA_2=60^\circ\ \left(360^\circ \text{ 的 } \frac{1}{6}\right),$$

从而

$$\angle OA_1A_2=\angle OA_2A_1=60^\circ\ \left(\frac{1}{2}(180^\circ-60^\circ)\right).$$

可見 $\triangle OA_1A_2$ 是正三角形，

$$A_1A_2=\text{半徑 } OA_1.$$

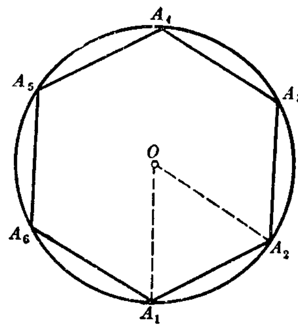


图 4·22

【作法】 从圓上任意点 A_1 起，用圓規連續截取等于半徑的弦 A_1A_2，A_2A_3，A_3A_4，A_4A_5，A_5A_6. 多边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 就是圓 O 的內接正六边形.

【証】 請讀者自己来完成.

为了簡化作图的步驟，我們常常应用下面的方法作已知圓 O 的內接正六边形.

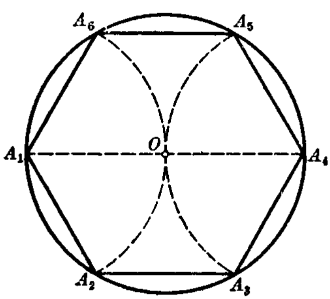


图 4·23

【作法】 引圓 O 的任意直徑 A_1A_4. 以 A_1 为圓心，圓 O 的半徑为半徑作弧，截圓 O 于 A_2 和 A_6 两点. 再以 A_4 为圓心，圓 O 的半徑为半徑作弧，截圓 O 于 A_3 和 A_5 两点，順次連結 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6，那末六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 就是圓 O 的內接正六边形(图 4·23).

作图題 2 已知圓 O，求作这个圓的內接正三角形.

分析 求作圓 O 的內接正三角形，首先应当三等分这个圓. 但是三等分一个圓可以在六等分这个圓的基础上完成，因为全圓的 $\frac{1}{6}$ 的两倍就是全圓

的$\frac{1}{3}$.

【作法】 依据作图题1，六等分圆 O. 依次連結第一，第三和第五个分点所得的三角形 $A_1A_3A_5$，就是圆 O 的內接正三角形(图 4·24).

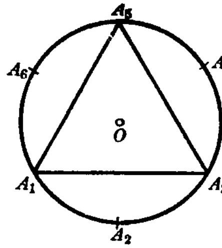


图 4·24

【証】 請讀者自己完成.

为了簡化作图的步驟，我們常常应用下面的方法来作已知圆 O 的內接正三角形.

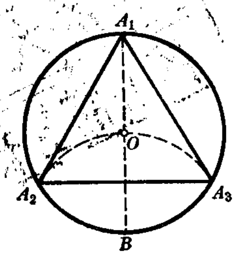


图 4·25

【作法】 引圆 O 的任意直徑 A_1B. 以 B 为圆心，圆 O 的半徑为半徑作弧，截圆 O 于 A_2 和 A_3. 順次連結 A_1，A_2 和 A_3，那末三角形 $A_1A_2A_3$ 就是圆 O 的內接正三角形(图 4·25).

作图題 3 已知圆 O，求作这个圆的內接正方形.

分析 求作圆 O 的內接正方形，首先应当四等分这个圆. 設 $\overparen{A_1A_2}$ 是圆 O 的$\frac{1}{4}$，連結半徑 OA_1 和 OA_2.

因为 $\overparen{A_1A_2}$ 是全圆的$\frac{1}{4}$，所以

$$\angle A_1OA_2=90^\circ \left(360^\circ \text{ 的 } \frac{1}{4}\right),$$

从而 $OA_1 \perp OA_2$ (图 4·26).

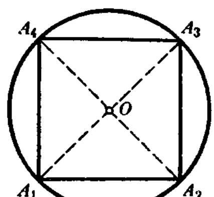


图 4·26

【作法】 作互相垂直的直徑 A_1A_3 和 A_2A_4，順次連結直徑的端点，得四边形 $A_1A_2A_3A_4$. 这就是圆 O 的內接正方形.

【証】 請讀者自己完成.

作图題 4 已知圆 O，求作这个圆的內接正十边形.

分析 要作圆 O 的內接正十边形，首先应当十等分这个圆. 設 $\overparen{A_1A_2}$ 是

圆 O 的 $\frac{1}{10}$ (图 4·27)，連結 A_1A_2，那末 A_1A_2 是求作的正十边形的一边.

連結半徑 OA_1 和 OA_2. 因为 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 是圆 O 的 $\frac{1}{10}$，所以

$$\angle A_1OA_2=36^\circ\left(360^\circ \text{ 的 } \frac{1}{10}\right),$$

从而 $$\angle OA_1A_2=\angle OA_2A_1=\frac{1}{2}(180^\circ-36^\circ)=72^\circ.$$

这里 72° 正好是 36° 的两倍，因此作 $\angle OA_2A_1$ 的平分綫 A_2M.

在 $\triangle OA_2M$ 中，

$$\angle A_2OM=\angle OA_2M=36^\circ,$$

所以 $$OM=A_2M.$$

$\angle A_1MA_2$ 是 $\triangle OMA_2$ 的一个外角，

所以

$$\angle A_1MA_2=\angle A_2OM+\angle OA_2M$$
$$=72^\circ.$$

从而 $\angle A_1MA_2=\angle MA_1A_2=72^\circ$,

$$\therefore\quad A_1A_2=A_2M.$$

即得 $A_1A_2=A_2M=OM$.

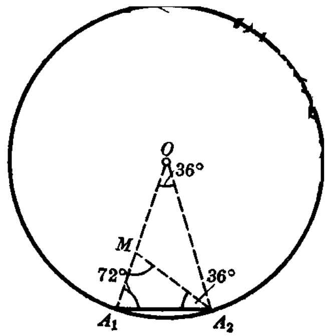


图 4·27

根据三角形內角平分綫性质定理 (§1·5)，有

$$OA_2:A_1A_2=OM:MA_1,$$

用 OM 代替 A_1A_2，再根据同圆半徑相等的理由，用 OA_1 代替 OA_2，上式成为

$$OA_1:OM=OM:MA_1.$$

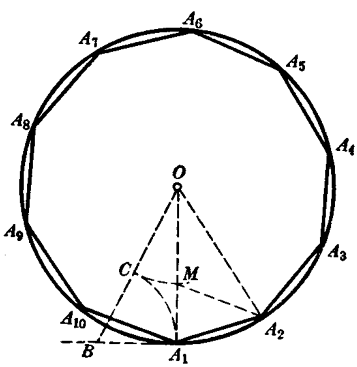


图 4·28

由这个比例式，可知点 M 按中外比分割半徑 OA_1 (§2·8 例 3)，由中外比分割半徑 OA_1 所得的較大綫段 OM 就是圆 O 的內接正十边形的一边.

【作法】 作圆 O 的任意半徑 OA_1，按中外比分 OA_1 于 M (具体的过程是：作 $A_1B\perp OA_1$，并且使

$$A_1B=\frac{1}{2}\cdot OA_1.$$

連結 BO，以 B 为圆心，BA_1 作半徑

作弧，截 BO 于 C，以 O 为圆心，OC 为半徑作弧截 OA_1 于 M)。从点 A_1 起，顺次截取等于 OM 的弦 A_1A_2，A_2A_3，A_3A_4，…，所得十边形就是圆 O 的內接正十边形(图 4·28)。

【証】 連結 A_2M 和半徑 OA_2。根据中外比分割綫段的定义，有

$$OA_1 : OM = OM : MA_1. \tag{1}$$

但

$$OM = A_1A_2, \tag{2}$$

所以(1)式可以写作

$$OA_1 : A_1A_2 = A_1A_2 : MA_1. \tag{3}$$

在 $\triangle OA_1A_2$ 和 $\triangle A_2A_1M$ 中，

$$\angle OA_1A_2 = \angle A_2A_1M,$$

且

$$OA_1 : A_1A_2 = A_1A_2 : MA_1;$$

依据三角形相似判定定理 2，

$$\triangle OA_1A_2 \backsim \triangle A_2A_1M.$$

因为 $\triangle OA_1A_2$ 是等腰三角形，所以 $\triangle A_2A_1M$ 也是等腰的，从而

$$A_1A_2 = A_2M. \tag{4}$$

由(2)和(4)式得，

$$A_1A_2 = A_2M = OM. \tag{5}$$

且

$$\angle A_2A_1M = \angle A_1MA_2, \quad \angle MOA_2 = \angle MA_2O. \tag{6}$$

根据三角形的外角定理和(6)式，有

$$\begin{aligned}\angle A_1MA_2 &= \angle MOA_2 + \angle MA_2O\\ &= 2\cdot\angle MOA_2,\end{aligned}$$

从而

$$\angle A_2A_1M = 2\cdot\angle MOA_2,$$

$$\begin{aligned}\angle OA_2A_1 &= \angle A_2A_1M\\ &= 2\angle MOA_2.\end{aligned}$$

根据三角形內角和定理，把 $\triangle OA_1A_2$ 的三个角相加，得

$$\begin{aligned}\angle A_1OA_2 + \angle OA_1A_2 + \angle OA_2A_1 &= \angle MOA_2 + \angle A_2A_1M + \angle OA_2A_1\\ &= \angle MOA_2 + 2\angle MOA_2 + 2\angle MOA_2\\ &= 5\angle MOA_2\\ &= 180^\circ.\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \angle MOA_2 = 36^\circ.$$

$\therefore$ A_1A_2 为圆 O 內接正十边形的一边.

例 1. 已知圆 O 的半徑为 R，求这个圆的內接正十边形的一边.

【解】 依据作图题4，把圆O的半径R按中外比分割，所得的較长綫段就是圆O的內接正十边形的一边．按照中外比分割綫段的定义，这一条較长綫段是半径R和由分割所得的較短綫段的比例中項，因此有比例式

$$R : a_{10} = a_{10} : (R - a_{10}), \tag{1}$$

这里a_{10}是圆O的內接正十边形的一边． 經过整理，(1)式成为a_{10}的一元二次方程

$$a_{10}^2 + Ra_{10} - R^2 = 0. \tag{2}$$

解方程(2)得

$$a_{10} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2}. \tag{3}$$

取正根，并且化簡，得

$$a_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R.$$

作图題 5 已知圆O．求作这个圆的內接正五边形．

分析 要作圆O的內接正五边形，首先应当五等分这个圆．但是五等分一个圆可以在十等分一个圆的基础上完成，因为全圆的$\frac{1}{10}$的两倍就是全圆的$\frac{1}{5}$．

【作法】 应用作图題4，十等分圆O．順次連結第一，第三，第五，第七和第九个分点，所得的五边形$A_1A_3A_5A_7A_9$就是圆O的內接正五边形(图4·29)．

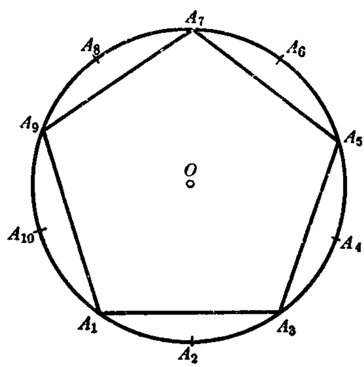


图 4·29

【証】 請讀者自己来完成．

例 2. 已知圆O的半径为R，求这个圆的內接正五边形的一边．

【解】 应用§4·3例5的結果：

$$a_n = \frac{1}{R}\sqrt{4R^2a_{2n}^2 - a_{2n}^4},$$

并且利用例1的答案：

$$a_{2n} = a_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R,$$

得 $$a_5=\frac{1}{R}\sqrt{4R^2a_{10}^2-a_{10}^4}$$

$$=\frac{1}{R}\sqrt{4R^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}R\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}R\right)^4}.$$

$$\therefore\quad a_5=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}R.$$

以上五个作图题是应用圓規和直尺作正多边形的基本作图题. 如果我們已經应用圓規和直尺作出了一个圓的內接正 n 边形（象正方形），那末我們可以平分这个正多边形每一条边所对的弧，然后順次連結这些分点和原有內接正 n 边形的頂点，就得到一个同圓的內接正 $2n$ 边形(象正八边形，图 4·30).

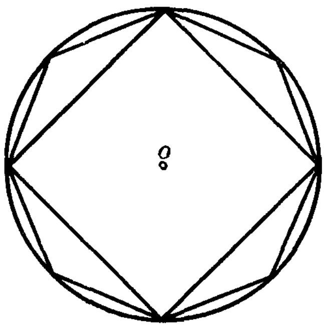


图 4·30

如果一次又一次地继續平分所得的正多边形每一条边所对的弧，我們可以得到这个圓的內接正 $2^2\cdot n$ 边形，正 $2^3\cdot n$ 边形，……等(象正十六边形，正三十二边形，……等).

有些正多边形的作图題是已知了这正多边形的元素之一，象周长，边心距，对角綫，……等，求作这个正多边形. 这些作图題并沒有一定的解法，希望讀者在熟习上面这些內容后，通过一定的练习来掌握.

例 3. 已知正八边形的边心距 r，求作这个正八边形.

【作法】 作直角三角形 OA_1M，使 $\angle A_1OM=22.5^\circ\left(22.5^\circ=\frac{1}{4}\cdot 90^\circ\right)$，直角边 $OM=r$. 以 O 为圓心，OA_1 为半徑作圓，延长 A_1M 交圓 O 于 A_2. 从 A_2 起，連續截取等于 A_1A_2 的弦，由这些弦构成的八边形就是所求作的正八边形(图 4·31).

【証】 連結 OA_2. 在直角三角形 OA_1M 和 OA_2M 中，

$\because \quad OA_1 = OA_2,$

$OM = OM.$

$\therefore \quad \triangle OA_1M \cong \triangle OA_2M.$

$\therefore \quad \angle A_2OM = \angle A_1OM$

$= 22.5°.$

从而 $\angle A_1OA_2 = 2 \times 22.5° = 45°$

$= 360° \cdot \frac{1}{8}.$

$\therefore \quad \overset{\frown}{A_1A_2}$ 是圆 O 的 $\frac{1}{8}$，

A_1A_2 是圆 O 的內接正八边形的一边，边心距 $OM = r$.

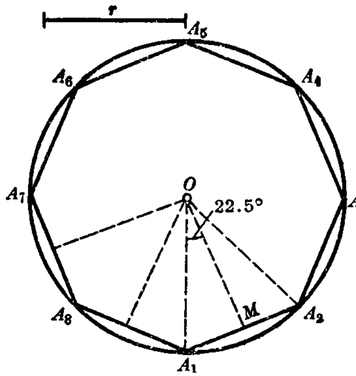


图 4·31

$\therefore$ 正八边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 是求作的正八边形.

例 4. 已知正五边形的对角綫 d. 求作这个正五边形.

【作法】 根据作图題5，作任意圆 O 的內接正五边形 $A_1A_2'A_3'A_4'A_5'$. 作对角綫 A_1A_3'. 在 A_1A_3' 的延长綫上取点 A_3，使 $A_1A_3 = d$. 过 A_3 作 $A_3A_2 \parallel A_3'A_2'$，$A_3A_2$ 交边 A_1A_2' 的延长綫于 A_2. 过 A_3 作 $A_3A_4 \parallel A_3'A_4'$，$A_3A_4$ 交对角綫 A_1A_4' 的延长綫于 A_4，过 A_4 作 $A_4A_5 \parallel A_4'A_5'$，$A_4A_5$ 交边 A_1A_5' 的延长綫于 A_5. 五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 就是求作的正五边形（图 4·32）.

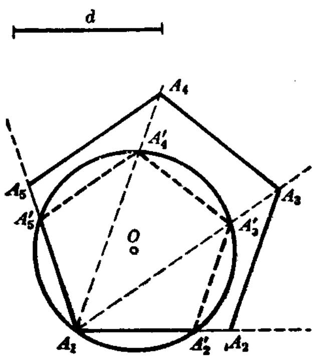


图 4·32

【証】 多边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 位似于多边形 $A_1A_2'A_3'A_4'A_5'$，

$\because$ 多边形 $A_1A_2'A_3'A_4'A_5'$ 是正五边形，

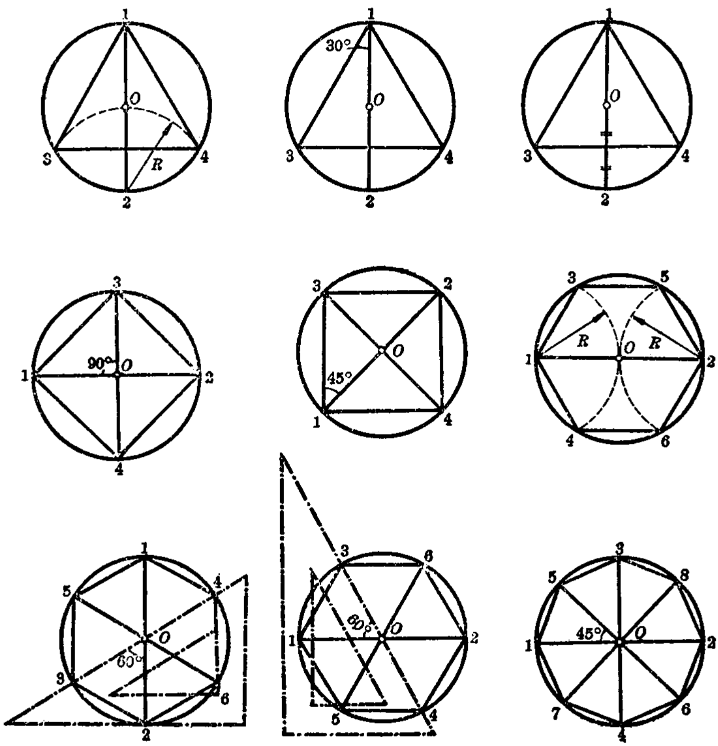
$\therefore$ 多边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 也是正五边形.

对角綫 $A_1A_3 = d$.

$\therefore$ 多边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 为求作的正五边形.

习 题 4·4

1. 下列各图是使用圆規和直尺作出的圓內接正三、四、六、八边形，并用数字表示各頂点作出的顺序. 試說明它們的作图方法，并且用同样的方法，画出这些图形.



2. 作已知圓的內接和外切正六边形.

3. 作已知圓的內接和外切正八边形.

4. 作已知圓的內接和外切正十二边形.

*5. 作圓內接正五边形，再作正五角星.

[提示：参考本节作图题 5，例 2.]

6. 我国民間相傳有正五边形的近似画法："九五頂五九，八五分两边."它的意义如图所示. 試采用这个近似画法，作边长是 50 毫米的正五边形.

7. 作一正六边形 $ABCDEF$，使对角綫 AC 等于定长.

8．作一正方形，使它与一已知的正六边形等积.

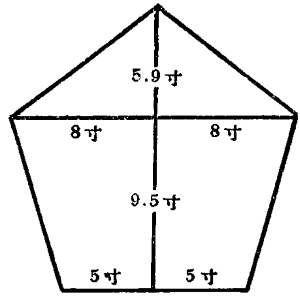
*9．求作下列各角：

(1) 36°； (2) 72°； (3) 18°.

10．已知一边，求作 (1) 正六边形；(2)正八边形.

11．“圓內接正七边形的边长約等于內接正三角形的边长的一半”，試利用这个性质，在半徑为 50 厘米的圓內作出一个近似的內接正七边形(不加証明).

*12．作出已知圓的內接正十五边形的一边.



(第 6 題)

[提示：参考本节作图題 4，并利用圓周的 $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$.]

本 章 提 要

1．概念 正多边形(中心、半徑、边心距、中心角).

2．性质 正多边形必有內切圓和外接圓，正多边形有对称軸.

3．判定 等分圓周可以得到圓的內接和外切正多边形，正多边形的相似.

4．計算 R, r, a_n, α_n 或 n 之間，如已知其中某两个，就可以求出其他的元素.

例如，已知 R，可得下表：

正多边形的边数	角			边长	边心距	面积
	內角	中心角	外角			
3	60°	120°	120°	$\sqrt{3}R$	$\frac{1}{2}R$	$\frac{3}{4}\sqrt{3}R^2$
4	90°	90°	90°	$\sqrt{2}R$	$\frac{\sqrt{2}}{2}R$	$2R^2$
*5	108°	72°	72°	$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}R$	★	$\frac{5}{8}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}R^2$
6	120°	60°	60°	R	$\frac{\sqrt{3}}{2}R$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}R^2$

(★ $\frac{1}{4}\sqrt{2(3+\sqrt{5})}R$).

倍边公式：$a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}}$.

5. **作图** 已知圆的半径 R, 可作內接于这圆的正三、四、五边形(或外切于这圆的同边数的正多边形)，从而可作这些边数倍增时的同圆內接（或外切)的正多边形.

在上述基础上，已知边长(或对角綫等)，利用代数法(或位似法)也可以作出一些正多边形.

复习题四

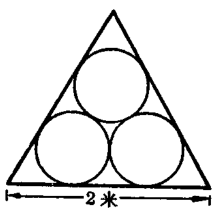
1. 怎样的多边形才能叫做正多边形?試举出等角而不等边、等边而不等角的多边形的例子. 如果这些多边形內接或外切于一个圆时又如何?

2. 已知一正多边形的一外角等于一內角的 $\frac{2}{3}$，求这个多边形的边数.

3. 怎样判定相似正多边形?它們的周长之比,面积之比可以用哪些比来表示?

4. 已知圆的半徑,求內接正三角形的內切圆的內接正方形的边长.

5. 如果已知某一圓 O 的外切正 n 边形的面积是 S 平方厘米. 当 $n=3$, 4, 6 时,能不能求出这个正多边形的边长,边心距,以及它的外接圆半徑?



(第6题)

6. 已知一个正三角形的边长等于2米. 在这个三角形中有三个內切等圆,其中的每一个与三角形的一边相切,且与其他二圆都相切. 求这些圆的半徑.

[提示: 要用勾股定理.]

7. 在半徑等于 R 的定圆中，已經作出一个正 n 边形. 再依次連接它的各边中点，得到一个新的正 n 边形. 当 $n=6$, 8 时，分别求出这两个新的正 n 边形的周长和面积.

*8. 半徑等于2厘米的圆中，一弦分圆周成 3:7 的两部分. 求这条弦长.

9. 如果延长正六边形的各边,使两两相交. 順次連結交点，那末得到一个新的正六边形,而且它們面积之比为 3:1.

10. 在边长为 $2a$ 的第一个正方形中，将各边中点連成第二个正方形，再将第二个正方形各边中点連成第三个正方形,計算这三个正方形周长的和与面积的和.

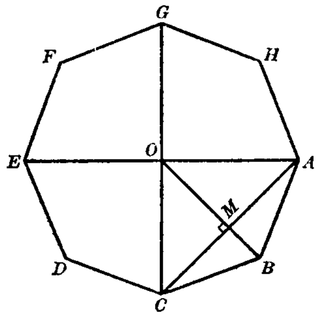
11. 作边长为 a 的正三角形的外接圆，再作这圆的外切正方形. 求这个正方形外接圆的半徑.

*12．已知一正五边形的对角綫等于 8 厘米，求这个五边形的边长.

13．已知正八边形的边长是 a，求各对角綫.

［提示：先求外接圓的半徑.］

14．水泥鋼筋柱子的横断面是正八边形，最长的对角綫是 40 厘米．求这横断面的面积.



(第 14 題)

［解：設横断面的正八边形是 $ABCDEFGH$．連結 AC，OB，它們相交于 M，且 $OB \perp AC$．$\triangle AOB$ 是正八边形面积的 $\frac{1}{8}$.

$$\triangle AOB\ 面积=\frac{1}{2}OB\cdot AM,\ OB=R,$$

$$AM=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}R.$$

所以

$$横断面面积=8\cdot\frac{1}{2}R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}R=2\sqrt{2}R^2=2\sqrt{2}(20)^2$$

$$=800\sqrt{2}\approx1130(平方厘米).$$

注意：这里假如用 $S=\frac{1}{2}pr$ 的公式来計算，或者計算 $\triangle AOB$ 面积时以 AB 为底，那末計算就麻煩得多了．在解題中，我們应留心选擇簡捷的方法.］

15．正三角形的外接圓半徑是 4 分米，在正三角形的边上作一正方形，求这正方形外接圓的半徑.

16．試用切去角的方法，把边长为 a 的正三角形变为正六边形，求这正六边形的边长.

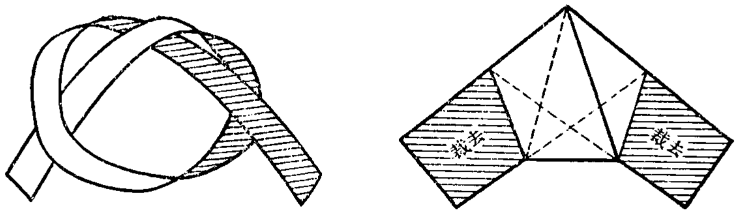
17．已知一边，試作出一个正八边形.

18．按下列方法自己动手去做一正五边形，并証明作法是正确的：用一条边緣平行的紙条，用折迭的方法，先把紙条打好一个結，然后拉紧并压平(但要注意不使它起皺紋)，再裁去多余的部分，剩下的結便成为一个正五边形了(如后頁图示).

［提示：紙的边緣是平行的，折迭之后，它們与五边形的一边和一条对角綫重合.］

19．一房頂的纵断面恰成正八边形的一半(如图)．已知 $AE=6\text{m}$．求房頂 BD 的寬，八边形的边长，以及天棚 $ABDE$ 的高.

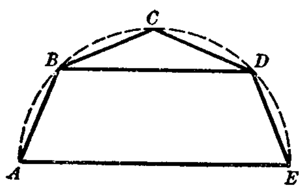
20．将半徑为 R 的圓分为 8 等分，并将各分点每隔一个用弦連結，使成



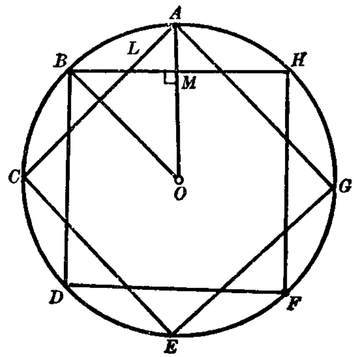
(第 18 题)

一八角星形. 求它各边的长.

[提示: 要求八角星形 $ALB\cdots$ 的一边 AL (如图), 就是要求等腰直角三角形ALM的斜边. 这里 AM 是半徑 OA 和正方形 $BDFH$ 的边心距 OM 之差, 是可求的.]



(第 19 题)



(第 20 题)

第五章　圓的周长和面积

我們学习过綫段的度量問題. 这个問題的主要內容是: 在指定了单位綫段之后, 研究怎样用一个实数精确地来表达一条任意綫段的长短. 我們对圓弧是不是可以作同样的处理呢? 在指定了单位綫段之后, 能否用一个实数精确地表达一个圓或者一条圓弧的长短呢? 下面我們就来研究怎样計算圓的周长和弧长的問題.

§5·1 圓的周长

度量綫段时, 我們用代表单位长度的綫段迭合在被度量的綫段上进行比較. 只要单位綫段的两个端点都落在被度量的綫段上, 它就和被度量綫段处处密切迭合. 这是因为"經过两点只有一条直綫"的緣故. 度量綫段就是在这样的基本事实的基础上进行的.

用单位綫段去度量圓弧时, 情况就完全不同. 把单位綫段的两个端点落在被度量的圓弧上之后, 它們就沒有任何其它的公共点, 这是因为"一条直綫和一个圓至多只有两个公共点"的緣故. 因此, 用綫段迭合比較来度量圓就无法进行, 我們必須另想别法.

我們的办法是: 用圓的內接正多边形的周长来近似地代替圓的周长. 一方面, 正多边形的边是綫段, 不論这条边是多么短, 至少在理論上我們可以用度量綫段的方法来得到它的长度. 另一方面, 我們可以无限地增加圓的內接正多边形的边数, 使每一条边非常小, 这时正多边形的周长就十分接近圓的周长.

照这个办法，我們先在圓 O 內作一个正六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$（图 5·1）．設它的周长为 p_6．打算用 p_6 来近似地代替圓 O 的周长，显然这是不够精确的．我們知道，"在所有連結两点的綫中，綫段是最短的"，因此边 A_1A_2 必然小于它所对的圓弧 $\overset{\frown}{A_1A_2}$．其他的边，象 A_2A_3，A_3A_4，… 和它們各自所对的圓弧也有同样的关系．由此可知：用 p_6 代替圓 O 的周长要小得多．

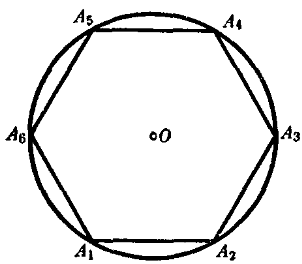


图 5·1

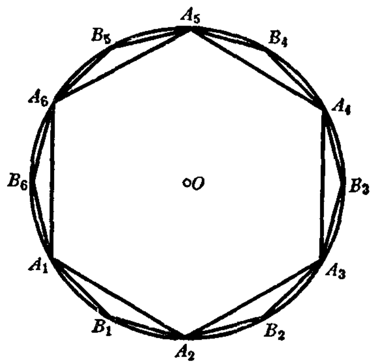


图 5·2

因此，我們平分这个正六边形每边所对的圓弧，順次連結这些分点 B_1，B_2，…，B_6 和原有正六边形的頂点 A_1，A_2，…，A_6，得圓 O 的內接正十二边形（图 5·2）．設它的周长为 p_{12}，并且打算用 p_{12} 来近似地代替圓 O 的周长．

根据"三角形任意两边的和大于第三边"的道理，我們有：

$$A_1B_1+B_1A_2>A_1A_2,$$
$$A_2B_2+B_2A_3>A_2A_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$A_6B_6+B_6A_1>A_6A_1.$$

把这些同向不等式相加，得

$$\begin{aligned}&A_1B_1+B_1A_2+A_2B_2+\cdots+B_6A_1\\&\qquad>A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_6A_1,\end{aligned}$$

就是 $$p_{12}>p_6.$$

仍旧依据"在所有連結两点的綫中，以綫段为最短"的道理，边 A_1B_1 必然小于它所对的圆弧 $\widehat{A_1B_1}$. 其他的边和它們各自所对的圆弧也有同样的关系，因此 p_{12} 仍旧比圆的周长要小.

从上面的討論可知，用 p_{12} 来代替圆 O 的周长，比用 p_6 来代替要更接近一些，因为 $p_{12}>p_6$. 但是 p_{12} 仍旧比圆的周长要小一些.

因此，我們平分这个正十二边形每边所对的圆弧，順次連結这些分点和原有正十二边形的頂点，得圆 O 的內接正二十四边形. 設它的周长为 p_{24}，并且打算用 p_{24} 来近似地代替圆 O 的周长.

根据和上面完全相同的方法，可以得到这样的結論：用 p_{24} 来代替圆 O 的周长，比用 p_{12} 来代替要更接近一些，因为 $p_{24}>p_{12}$. 但是 p_{24} 仍旧比圆的周长要小一些.

平分圆 O 的內接正多边形每一边所对的圆弧的过程，理論上讲，可以无限止地继續下去. 每平分一次，正多边形的边数就增加一倍. 如果我們从圆 O 的內接正六边形开始，一倍又一倍地增加它的边数，并且把正多边形的周长理解为正多边形一边的长度和它边数的乘积，那么所得的一系列的周长可以排成下面的一列数：

$$p_6,\ p_{12},\ p_{24},\ p_{48},\ p_{96},\ p_{192},\ p_{384},\cdots \tag{1}$$

这里象 p_{192} 代表圆 O 的內接正 192 边形的周长.

从前面的討論可知，圆 O 內接正多边形的边数每增加一倍，它的周长就相应地有所增加. 因此上面的一列数里，任何一个数都比它前面所有的数要大. 例如 p_{48} 比 p_6, p_{12}, p_{24} 都要大. 但是在边数无限止地成倍增加时，圆 O 的內接正多边形的周长却并不漫无止境地增加，因为每一个周长始終比圆小，因此在这一列数里任何一个数都小于圆的周长.

在此情形下，可以看出，圆 O 的內接正多边形的边数越多，它的周长越接近圆，它們之間的差也越来越小. 在边数无限止地成

倍增加时，圓和它內接正多边形的周长的差可以达到"微乎其微"的程度．因此，我們把圓的內接正多边形的边数无限增加时，它的周长就看做是圓的周长

現在我們假設圓 O 的半徑为 R，逐步計算这个圓的內接正六边形，正十二边形，正二十四边，……的周长，从而得到圓 O 的周长的近似値．在計算的过程中，我們要用到"倍边公式"

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}}.$$

(1) 根据 §4·3 例 1，$a_6=R$. $\therefore p_6=6R$.

(2) 根据倍边公式 $a_{12}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_6^2}}$

$$\approx 0.51764R,$$

$$\therefore\quad p_{12}=12a_{12}\approx 6.2117R.$$

(3) 根据倍边公式 $a_{24}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_{12}^2}}$

$$\approx 0.26105R,$$

$$\therefore\quad p_{24}=24a_{24}\approx 6.2652R.$$

(4) 根据倍边公式 $a_{48}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_{24}^2}}$

$$\approx 0.13081R,$$

$$\therefore\quad p_{48}=48a_{48}\approx 6.2789R.$$

…………………………

依照这样的方法可以继續計算下去．計算的結果列表如下，在这个表里，我們还計算了周长与直徑的比：

圓 O 的內接正多边形的边数，n	一边的长，a_n	周长，$p_n=na_n$	周长与直徑的比 $\frac{p_n}{2R}$
6	1.00000R	6.0000R	3.0000
12	0.51764R	6.2117R	3.1058
24	0.26105R	6.2652R	3.1326
48	0.13081R	6.2789R	3.1394
96	0.06544R	6.2822R	3.1411

仔細观察这一張表，可以发現一个非常重要的結果：当边数 n 逐步成倍增加时，圓內接正 n 边形的周长和直徑的比逐步接近一

个常数．如果把圆内接正96边形的周长（p_{96}）近似地代替圆的周长（C），那末圆的周长C，和直徑$2R$的比近似于3.14.

我們把圆的周长C和直徑$2R$的比叫做**圆周率**．圆周率是一个絕对常数，就是說，不管在直徑为多少的圆中，圆的周长和它的直徑的比值总是一致的．我們用希腊字母π①来代表它．

$$\because \quad \frac{C}{2R}=\pi,$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{C=2\pi R}. \qquad (2)$$

（2）式就是圆的**周长公式**．根据这个公式，只要把圆的直徑乘以常数π就得到圆的周长，或者把圆的周长除以常数π就得到圆的直徑的长度．

注意 在高等数学里，可以証明圆周率π是一个无理数，只能取它的近似值．在一般性质的运算中，取$\pi\approx3.14$或$\pi\approx\frac{22}{7}$就足够了．在精确度要求較高的計算中，可以取$\pi\approx3.1416$．在某些运算里，需要把π去除某数，我們可以把这个运算看做把$\frac{1}{\pi}$去乘某数，并且記好$\frac{1}{\pi}\approx0.3183$．这样就能簡化一些运算的手續．

圆周率π是一个非常特殊的数，它有广泛的应用．过去有不少数学家計算了π的值．我国南北朝时代的祖冲之（公元429～500年）精确地断定：

$$3.1415926<\pi<3.1415927,$$

并且又規定了$\frac{22}{7}\approx3.142$为疏率，$\frac{355}{113}\approx3.14159$为密率．在祖冲之算出密率之后的一千一百多年，德国数学家鄂图才得到同样的結果．

从圆的周长公式，容易得到下面的推論：

推論 圆的周长的比等于它們半徑的比，或者直徑的比．

例1． 火車头上的主动輪每分钟轉动250次，主动輪的直徑为1.2米，求火車每小时行多少公里？

【解】 主动輪每轉一次，火車前进1.2π米．

$\because$ 主动輪每小时轉动250次$\times60$，

① π讀作pài.

$\therefore$ 火車一小时行的路$=\dfrac{250\times60\times1.2\pi}{1000}$

$=18\pi$

≈57 (公里).

答：火車每小时約行 57 公里.

例 2. 圓 O_1 的半徑为圓 O_2 的半徑的 K 倍，圓 O_2 的周长为 C. 求它們的直徑.

【解】 設圓 O_2 的半徑为 r, 那末圓 O_1 的半徑为 Kr. 根据圓的周长公式得 $C=2\pi r$.

$\therefore$ 圓 O_2 的直徑$=2r=\dfrac{C}{\pi}$.

圓 O_1 的直徑$=2(Kr)=K(2r)=\dfrac{KC}{\pi}$.

例 3. 环形的外圓 C_2 和內圓 C_1 的周长分别为 250 厘米和 150 厘米，求环形的寬 d (图 5·3).

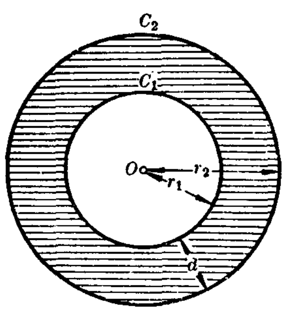


图 5·3

【解】 設圓 C_2 和 C_1 的半徑分别为 r_2 和 r_1, 那末

$$r_2=\frac{250}{2\pi},\quad r_1=\frac{150}{2\pi}.$$

$$d=r_2-r_1$$

$$=\frac{250}{2\pi}-\frac{150}{2\pi}=50\times\frac{1}{\pi}$$

$$\approx50\times0.318\approx16\ (\text{cm}).$$

答：环形的寬約为 16 厘米.

例 4. 已知等腰三角形 ABC 的頂角 A 为 $120°$, 高 $AD=h$ (图 5·4). 求它的內切圓的周长.

【解】 以前学习过：三角形三个內角的平分綫交于一点，这点就是这个三角形的內切圓的圓心.

等腰三角形 ABC 的高 AD 也是它的頂角 BAC 的平分綫. 現在作 $\angle ABD$ 的平分綫 BO, 交 AD 于 O. 那末点 O 就是三角形

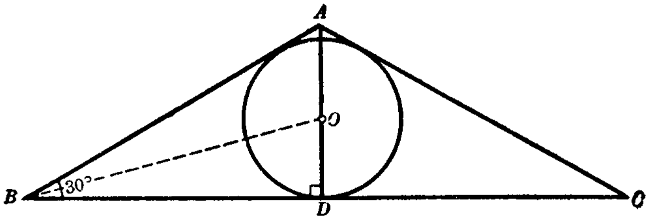


图 5·4

ABC 的內切圓的圓心，OD 就是它的半徑.

在直角三角形 ABD 中，$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=60°$，所以 $\angle ABD=30°$.

我們知道，"在含有 30° 角的直角三角形中，30° 角所对的边等于斜边的一半"，因此有 $AB=2AD=2h$.

应用勾股定理，得 $AD^2+BD^2=AB^2$. 从而

$$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{3}h.$$

根据三角形内角平分綫定理，有

$$AO:OD=AB:BD.$$

根据合比定理，上式成为

$$(AO+OD):OD=(AB+BD):BD.$$

也就是 $\quad h:OD=(2h+\sqrt{3}h):\sqrt{3}h.$

由此求 OD，得

$$OD=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}h$$

$$=\sqrt{3}(2-\sqrt{3})h.$$

$\therefore$ 內切圓 O 的周长 $=2\pi\cdot OD$

$$=2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})\pi h.$$

例 5. 在图5·5 中，AB 是圓 O 的直徑，弦 AC 等于半徑 OA，引 $OD\perp AC$，OD 交过 A 的切綫 PQ 于 D. 在 PQ 上取点 E，使 $DE=3\cdot OA$. 連結 BE. 如果把 BE 当作圓 O 的周长的一半，那末誤差是多少？

【解】 設圓 O 的半徑为 R.

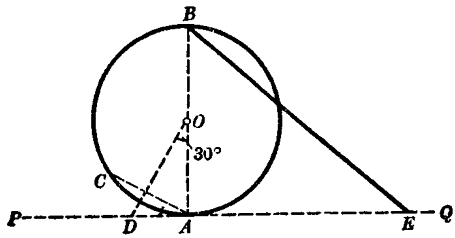


图 5·5

$\because$ $\angle AOD$ 是圓內接正六边形中心角的一半，

$$\therefore \quad \angle AOD=30^\circ.$$

从而 $OD=2\cdot DA$. 应用勾股定理，有

$$OD^2=DA^2+OA^2,$$

就是
$$(2\cdot DA)^2=DA^2+OA^2.$$

从而
$$3DA^2=R^2,\quad DA=\frac{\sqrt{3}}{3}R.$$

$$\begin{aligned}\because\quad AE&=DE-DA\\&=3R-\frac{\sqrt{3}}{3}R\\&=\left(\frac{9-\sqrt{3}}{3}\right)R.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad BE&=\sqrt{AB^2+AE^2}\\&=\sqrt{(2R)^2+\left[\left(\frac{9-\sqrt{3}}{3}\right)R\right]^2}\\&=\sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}}\cdot R\\&\approx 3.14153R.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{圓 } O \text{ 的周长的一半}&=\frac{1}{2}\cdot 2\pi R\\&\approx 3.14159R.\end{aligned}$$

所以用 BE 代替圓 O 半周长时，誤差是

$$3.14159R-3.14153R=0.00006R.$$

注意 已知圓的半徑，我們不能用圓規和直尺作出和圓周等长的綫段. 例5提供了"已知圓的半徑，用圓規和直尺作出一条和圓周近似相等的綫段"的作法.

习 題 5·1

1．已知圓的直徑为 (1) 20 米，(2) 70 厘米．求圓的周长．

2．已知圓的周长为 (1) 25 厘米，(2) 4.75 分米．求圓的半徑．

3．一圓的周长是 1000 毫米，求它的直徑(精确到 0.05 毫米)．

[解：∵ $C=2\pi R$，$2R$ 是直徑，$C=1000\,\mathrm{mm}$．

$$\therefore 2R=\frac{1000}{\pi}\,\mathrm{mm}\approx 1000\,\mathrm{mm}\times 0.3183\approx 318.3\,\mathrm{mm}.$$]

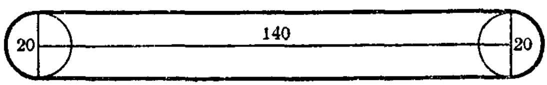
4．求边长是 6 厘米的正三角形的外接圓和內切圓的周长．

5．圓的直徑为 50 厘米，如果半徑增加 10%，圓周长增加多少(精确到厘米)？

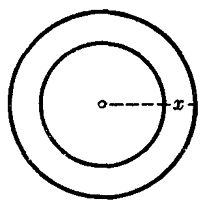
6．如果圓的半徑增加 a，它的周长增加多少？

7．如果圓周增加 100 厘米，那末圓的直徑增加多少厘米？

8．直徑各等于 20 厘米的两滑輪，中心相距 140 厘米．求連結这两个滑輪的皮带的长(精确到 0.05 厘米)．



(第 8 題)



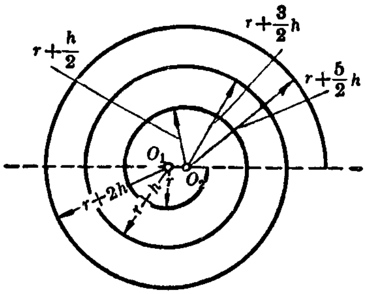
(第 9 題)

9．两个同心圓中，外圓的周长为 83 厘米，內圓的周长为 76 厘米．求这两圓組成的环形的寬(精确到毫米)．

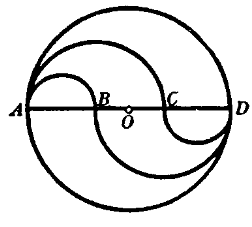
10．一个齿輪的直徑为 66 厘米，每两个齿中的距离为 34.5 毫米，这个齿輪有多少齿？

11．一只皮带輪的直徑是 250 毫米，轉速为 96 轉/分，求皮带移动的速度(米/秒)．

12．图示的曲綫是这样組成的：虛綫下的弧是以 O_1 为圓心，分别以 r，$r+h$，… 为半徑画出的半圓；虛綫上面的弧是以 O_2 为圓心，分别以 $r+\frac{h}{2}$，$r+\frac{3h}{2}$，… 为半徑画出的半圓．这里 $O_1O_2=\frac{r}{2}$，$h=r$，$r=5\,\mathrm{mm}$．求这条曲綫的总长．



(第 12 题)

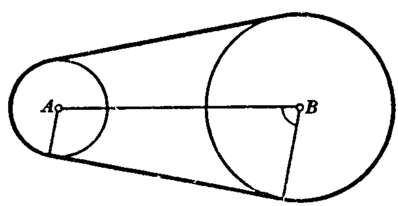


(第 13 题)

13. AD 为圆 O 的直徑，B 与 C 为直徑 AD 上的点，如果 $AB=BC=CD$，証明連結 A 和 D 由四个半圆做成的曲綫(如图)，和圆 O 的周长一样长.

14. 中心在 A 和 B 的两个輪子由皮带相連結. B 的半徑为 8 尺，每分钟轉 40 次，A 的半徑为 2 尺. 求：(1) A 輪每分钟轉多少次？(2) 当 AB 的长为 12 尺时，皮带有多少长？

15. 求作一个圆，使它的周长等于二已知圆的周长的和.



(第 14 题)

§5·2 圆弧的长

圆弧是圆的一部分. 圆的周长問題已經解决，圆弧的长度問題也可以跟着得到解决. 我們曾經把一个圆分为 360 个等分，每一个等分叫做一度的弧. 显然一度的弧是圆的 $\frac{1}{360}$，因此一度的弧的长度应当是圆的周长的 $\frac{1}{360}$. 設圆的半徑为 R，那末圆的周长为 $2\pi R$. 所以在这个圆上，一度的弧的长度为 $\frac{1}{360}\cdot 2\pi R$，就是 $\frac{\pi R}{180}$. 在这个圆上 n° 的弧的长度显然为 $n\cdot\frac{\pi R}{180}$. 因此，我們得到

下面的**弧长公式**:

$$l=\frac{n\pi R}{180}.$$

这里 l 是弧长, n 是弧所含的度数, R 是弧的半徑. 讀者只要牢牢記好: "一条含有 n° 的弧是圆的 $\frac{n}{360}$"这一基本事实,就不会忘記弧长公式;即使忘記,也可自己推导出来.

例 1. 如图 5·6. 滑輪 O 的半徑为 R, 绳子和滑輪的接触部分是 $\overset{\frown}{BCD}$, 绳子 AB 段和 DE 段成 30° 的角. 求 $\overset{\frown}{BCD}$ 的长.

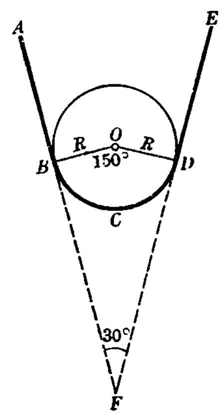


图 5·6

【解】 連結半徑 OB 和 OD. AB 切圆 O 于 B, $\therefore OB\perp AB$. 同样 $OD\perp DE$.

四边形 $OBFD$ 有一个角为 30°, 两个角为直角. $\therefore \angle BOD=150^\circ$, 从而 $\overset{\frown}{BCD}$ 含有 150°. 应用弧长公式,得

$$l=\frac{150\,\pi R}{180}$$

$$=\frac{5}{6}\pi R.$$

例 2. 已知弧长 150 厘米,弧半徑为 30 厘米. 求弧的度数.

【解】 应用弧长公式,得

$$150=\frac{n\cdot\pi\cdot 30}{180},$$

$$n=\frac{150\cdot 180}{30\,\pi}=900\cdot\frac{1}{\pi}$$

$$\approx 900\times 0.318\approx 286.$$

答: 弧的度数約为 286.

例 3. 两輪的半徑各为 1 尺和 5 尺, 两輪的圆心距是 8 尺. 現在大輪用皮带拖动小輪,如图 5·7 所示. 求皮带的长.

【解】 設两輪的圆心分別是 O 和 O'. 过 O 和 O' 引两輪的对称軸 CD. 因此所求皮带之长 $=(\overset{\frown}{CA}$ 的长 $+$ 公切綫 AB 的长

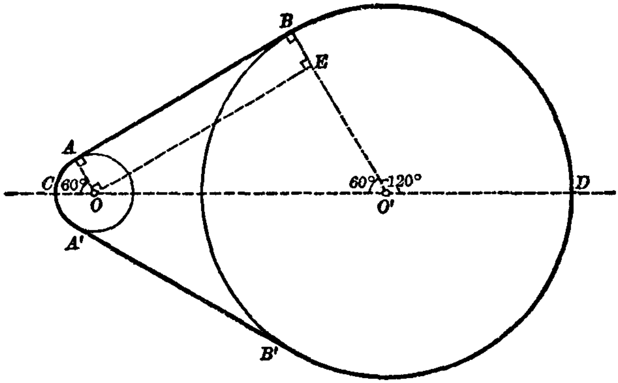


图 5·7

$+\overset{\frown}{BD}$ 的长$)\times 2$.

連結半徑 OA 和 $O'B$, 过 O 引 $OE /\!/ AB$, OE 交 $O'B$ 于 E.

容易看出 $OEBA$ 是一个矩形, 从而 $OA=EB$, $AB=OE$. $\triangle OO'E$ 是一个直角三角形, 它的直角边 $O'E=O'B-EB=O'B-OA=5-1=4$ 尺, 它的斜边 $OO'=8$ 尺. 由勾股定理得

$$OE=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}\,(\text{尺}),$$

就是

$$AB=4\sqrt{3}\,(\text{尺}).$$

現在 OO' 正好是 $O'E$ 的两倍, 根据"如果直角三角形的斜边是一条直角边的两倍, 那末这两边所夹的角是 60°"的理由, 有 $\angle OO'E=60°$. 从而 $\angle DO'B=120°$. 根据弧长公式, 得

$$\overset{\frown}{BD}\text{ 的长}=\frac{120\cdot\pi\cdot 5}{180}=\frac{10}{3}\pi\,(\text{尺})$$

$\because OA\perp AB$, $O'B\perp AB$, $\therefore OA /\!/ O'B$. 从而 $\angle COA=\angle OO'B=60°$. 根据弧长公式, 得 $\overset{\frown}{CA}$ 的长 $=\dfrac{60\cdot\pi\cdot 1}{180}=\dfrac{\pi}{3}$ (尺).

$$\therefore\quad \text{皮带的长}=\left(\frac{1}{3}\pi+4\sqrt{3}+\frac{10}{3}\pi\right)\times 2$$

$$=\left(\frac{22}{3}\pi+8\sqrt{3}\right)\approx 36.9\,(\text{尺}).$$

答: 皮带的长約为 36.9 尺.

例 4. 圆 O 和 O' 相交于 A 和 B，它們的半徑都是 R，圆心距 $OO'=\sqrt{3}R$. 求两圆所圍的平面部分的周长(图 5·8).

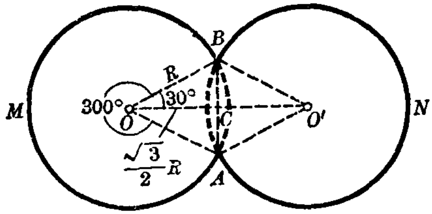


图 5·8

【解】 作半徑 OA, OB, $O'A$, $O'B$ 和公弦 AB. 图形关于 AB 为軸对称，因此所求的周长为 $\overset{\frown}{AMB}$ 的两倍.

$\because AB$ 垂直平分 OO'，$\therefore OC=\frac{\sqrt{3}}{2}R$，$\triangle OCB$ 为直角三角形.

应用勾股定理，得 $BC=\sqrt{OB^2-OC^2}=\sqrt{R^2-\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R\right]^2}=\frac{R}{2}$. 根据“如果直角三角形的斜边是一条直角边的两倍，那末这两边所夹的角是 60°”的理由，$\angle OBC=60°$，从而 $\angle BOC=30°$，$\angle AOB=2\angle BOC=60°$. 所以 $\overset{\frown}{AMB}$ 所对的圆心角 $=300°$，就是 $\overset{\frown}{AMB}$ 含有 300°.

依据弧长公式，得

$$\text{所求的周长}=2\times\frac{300\cdot\pi R}{180}=\frac{10}{3}\pi R.$$

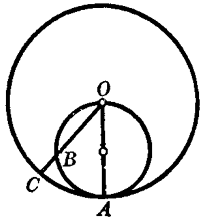
习 题 5·2

1. 已知一圆的半徑为 46.0 厘米，求 18°26′ 的弧的长(精确到 0.1 厘米).

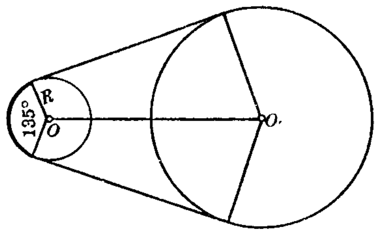
[解: 1° 的弧的长 $=\frac{\pi R}{180}$. 1′ 弧的长是 1° 弧的 $\frac{1}{60}$，所以 18°26′ 的弧也就是 $\left(18+\frac{26}{60}\right)^\circ$ 的弧. $\therefore l=\frac{46\pi}{180}\left(18+\frac{26}{60}\right)$. 这里 π 可取3.142，使 l 精确到 0.1 厘米.

$$\therefore\quad l=\frac{46\times3.142}{180}\left(18+\frac{26}{60}\right)=14.8(\text{cm}).$$]

2. 如图，两圆内切于 A，大圆的半徑是小圆的直徑．又，大圆的半徑 OC 交小圆于点 B，求証 AB 弧的长等于 AC 弧的长．



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图所示的一个傳动装置中，小圆盘的直徑是 20 厘米，傳动带与圆盘接触部分所对的圆心角是 135°．求小圆盘上摩擦面的长度．

4. 在两个圆中，等长的弧所对的圆心角的比，等于两圆半徑的反比．

5. 在圆心角为 120° 的 $\overset{\frown}{ACB}$ 的两端，引相交于点 D 的两条切綫．再作一个圆和綫段 AD，BD 以及 $\overset{\frown}{ACB}$ 都相切．求証这个圆的周长等于 $\overset{\frown}{ACB}$ 的长．

6. 已知弧长为 l，它所对的圆心角为 120°．求它所对的弦长．

[解：根据弧长公式 $l=\dfrac{n\pi R}{180}$，現知 $n=120$，所以圆的半徑

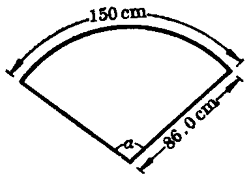
$$R=\frac{180l}{120\pi}=\frac{3l}{2\pi}.$$

設所求的弦长为 a．$\because$ 它对 120° 的圆心角，$\therefore$ 它应当是这个圆的內接正三角形的一边．于是 $a=\sqrt{3}R$，

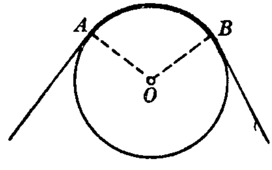
$$\therefore\quad a=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}l=\frac{3}{2}\times1.732\times0.318l=0.81l.$$]

7. 設弧所对的圆心角为：(1) 60°；(2) 90°；(3) 120°．所对的弦长是 a，試分别求出弧的长．

8. 要用白鉄皮剪成如图的扇形，要剪成多么大的圆心角？



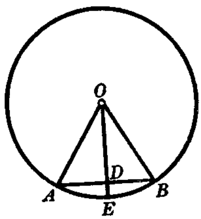
(第 8 题)



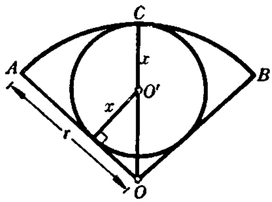
(第 9 题)

9. 滑輪的直徑是 180 mm，皮带附着滑輪的弧 AB 的长是 200 mm；求这弧所对的圆心角(精确到 10′)．

10. 有时我們这样計算圓周长的近似値：作正三角形 AOB 和高 OD，延长 OD 交圓 O 于 E，則取圓周长 $C=6AO+2DE$. 試問当用 $\pi=3.1416$ 时，它的誤差是多少？



(第 10 题)



(第 11 题)

*11. 图中 $\angle AOB=120°$，$\overset{\frown}{ACB}$ 的长为 l，求和两半徑 OA，OB 与 $\overset{\frown}{ACB}$ 相切的圓 O' 的周长.

[提示：先求出已知弧的半徑 r，再求圓 O' 的半徑 x.]

§5·3 弧 度 制

角的单位由圓弧的单位而来，我們先把一个圓分为 360 个等分，每一个等分叫做 $1°$（度）的弧，$1°$ 的弧所对的圓心角叫做 $1°$ 的角（图 5·9）. 不到 $1°$ 的角用“$'$”（分）和“$''$”（秒）的单位来量，并且規定 $1°=60'$，$1'=60''$. “60 进位”是这个制度的特点.

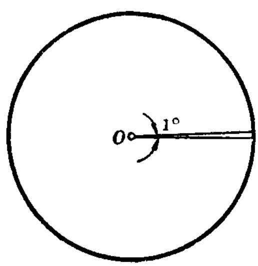


图 5·9

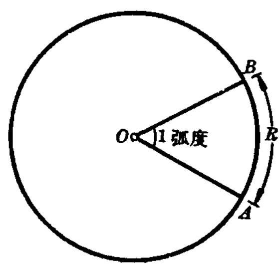


图 5·10

現在介紹另一种量角的单位. 我們規定：如果圓心角 AOB 所对的 $\overset{\frown}{AB}$（注意：这里是 $\overset{\frown}{AB}$，不是弦 AB！）恰好等于半徑 R，那末圓心角 AOB 是一个单位角，并且把它叫做 1 弧度的角（图 5·10）.

用弧度作单位来量角的制度叫**弧度制**.

度,分,秒是量角的单位,弧度也是量角的单位,这两种单位之間究竟有什么关系? 1° 合多少弧度? 1 弧度合多少度, 分,秒? 現在我們来研究这些問題.

依据圆的周长公式 $C=2\pi R$, 得 $\frac{C}{R}=2\pi$. 这个式子指出,圆的周长 C 含有半徑 R 的 2π 倍. 但是整个圆所对的圆心角是一个周角,一周角所对的弧含有 2π 个半徑,所以一周角等于 2π 弧度. 但是一周角也等于 360°, 从而

$$2\pi \text{ 弧度}=360^\circ. \tag{1}$$

把(1)式两端都除以 2π, 得

$$\begin{aligned}\mathbf{1\ 弧度}&=\frac{\mathbf{180^\circ}}{\boldsymbol{\pi}}\\&\approx 57.2957^\circ.\end{aligned} \tag{2}$$

把(1)式两端都除以 360, 得

$$\begin{aligned}\mathbf{1^\circ}&=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{180}}\mathbf{弧度}\\&\approx 0.017453 \text{ 弧度}.\end{aligned} \tag{3}$$

根据(2)式和(3)式,我們得到两种单位互相换算的方法:把一个角的弧度 m 乘上因式 $\frac{180}{\pi}$, 所得的乘积 $\frac{m\cdot 180}{\pi}$, 就是这个角的角度数;把一个角的角度 n 乘上因式 $\frac{\pi}{180}$, 所得的乘积 $\frac{n\pi}{180}$,就是这个角的弧度数.

注意 对上面的方法,我們还可以这样的理解: 从图 5·9 和 5·10 可以看出,1 弧度的角比 1° 的角要大得多. 把一个 m 弧度的角化为 n° 的角, n 的值必然比 m 要大得多, 因此在换算时, m 必須乘上一个大于一的因子 $\frac{180}{\pi}$. 同时 1° 的角比 1 弧度的角要小得多. 把一个 n° 的角化为 m 弧度的角, m 的值必然比 n 要小得多,因此在换算时, n 必須乘上一个小于一的因子 $\frac{\pi}{180}$.

如果我們再牢牢記好: "360° 相当于 2π 弧度" 这一基本事实, 我們就能准确地掌握角度制和弧度制的互相换算的方法了.

$30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°$ 是一些常常用到的特殊角，把它們分别乘以 $\frac{\pi}{180}$，我們得到这些特殊角的弧度值：$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π.

采用了弧度制以后，圓心角和它所对圓弧的关系的表示式得到簡化．因为 1 弧度的圓心角所对的圓弧等于半徑 R，所以 α 弧度的圓心角所对的圓弧等于半徑 R 的 α 倍，就是 αR（图 5·11）．从而得

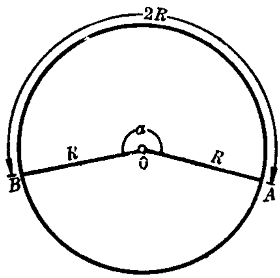


图 5·11

弧长公式：

$$l=\alpha R.$$

这个弧长公式和 § 5·2 的弧长公式 $l=\frac{n\pi R}{180}$．形式虽然不同，实质上是一样的．把公式 $l=\frac{n\pi R}{180}$ 写成 $l=\left(n\cdot\frac{\pi}{180}\right)R$，因为一个角的角度 n 乘以 $\frac{\pi}{180}$ 后，就得这个角的弧度 α，所以公式 $l=\left(n\cdot\frac{\pi}{180}\right)R$ 就成为 $l=\alpha R$ 了．

例 1． 化 $305°30'$ 为弧度．

【解】

$$305°30'=305.5\times\frac{\pi}{180}$$

$$\approx 5.332 \text{ 弧度}.$$

例 2． 化 3.5 弧度为度．

【解】 $3.5 \text{ 弧度}=3.5\times\frac{180}{\pi}$

$$\approx 200°30'.$$

例 3． 弦长等于 R，求这条弦所对的圓心角的弧度（图 5·12）．

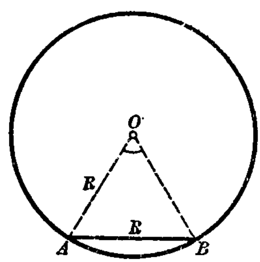


图 5·12

【解】 設弦 $AB=R$．根据 § 4·3 例 1，AB 是圓內接正六边形的一边，它所对的圓心角 $AOB=60°$．現在把 $60°$ 化

为弧度，

$$60° = 60 \times \frac{\pi}{180}$$

$$\approx 1.047 \text{ 弧度}.$$

答：这条弦所对的圆心角約为 1.047 弧度。

注意 这个例题告訴我們，等于半徑的弦所对的中心角不是1弧度！

习 题 5·3

1．把下列角度化为弧度：(1) 135°；(2) 75°；(3) 67°30′；(4) 60° (5) 22°30′；(6) 18°

2．把下列弧度化为角度：(1) $\frac{\pi}{4}$；(2) $\frac{3}{5}\pi$；(3) $\frac{5}{6}\pi$；(4) $\frac{3}{8}\pi$；(5) $\frac{\pi}{12}$；(6) $\frac{8}{9}\pi$．

3．已知一条弧的长是 3.7 厘米，这弧所对的圆心角是 1.85 弧度，圓的半徑是几厘米？

4．已知弧长为 l，它所对的圆心角的弧度为 (1) $\frac{\pi}{3}$；(2) $\frac{\pi}{2}$；(3) $\frac{2}{3}\pi$ 时，分别求它所对弦的长．

5．已知含 81°54′ 的弧的长为 0.455 米，求它的半徑(精确到毫米)．

6．直徑等于 40 厘米的滑輪，以 45 弧度/秒的角速度旋轉．求輪子的圓周上一点在 5 秒钟內所經过的距离．

(角速度是指連接运动质点和圓心的半徑轉过的角度跟所用时間的比．)

7．圓的直徑为 400 毫米，求圓心角为 1.358 弧度时所对的弧长(准确到毫米)．

§5·4 圓的面积

在計算圓的周长时，我們先在圓內作內接正多边形，然后使它的边数一倍又一倍地增加，这时正多边形的周长就逐步接近圓的周长．

在求圓的面积时，我們采用类似的方法：先在圓內作一个內接正多边形，然后使它的边数成倍地增加，这时，这个內接正多边形的面积就逐步接近圓的面积．

我們已經学习过下面的两点：

(1) 正多边形的面积$=\frac{1}{2}\times$周长$\times$边心距.

(2) 当边数无限地成倍增加时，圓的內接正多边形的周长就接近圓的周长 $2\pi R$.

通过图 5·13, 我們可以看出：

(3) 当边数无限地成倍增加时，圓的內接正多边形的边心距逐步接近圓的半徑 R.

根据以上的三点，我們用 $2\pi R$ 和 R 分别代替 (1) 的正多边形面积公式中的周长和边心距，得圓面积公式：

$$\textbf{圓的面积}=\frac{1}{2}\cdot(2\pi R)\cdot R$$
$$=\boldsymbol{\pi R^2}.$$

这里 R 是圓的半徑.

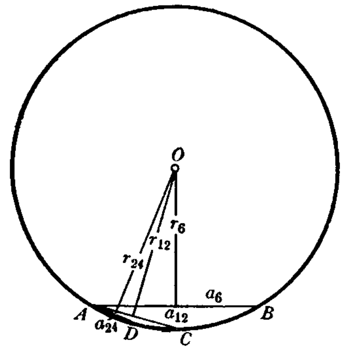


图 5 13

以圓面积公式为根据，容易得到下面的推論：

推論 圓的面积的比等于它們半徑的比的平方.

例 1. 一个正方形和一个半徑等于 100 厘米的圓等积. 求这个正方形一边的长.

【解】 設正方形的一边为 x 厘米，按題意得

$$x^2=\pi\times100^2,$$
$$x=100\sqrt{\pi}\approx177\,(\text{cm}).$$

答：这个正方形的一边約为 177 厘米.

例 2. 圓的面积为 100 平方厘米. 求它的直徑.

【解】 設圓的直徑为 D, 按題意得

$$100=\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2,$$

$$\therefore \qquad D=\frac{20}{\sqrt{\pi}}\approx 11.3(\text{cm}).$$

答：圓的直徑約为 11.3 厘米.

例 3．圆形鉄片的周长为 100 厘米．在这一鉄片的中間挖去一个小圓片，使余下部分的面积为 400 平方厘米(图 5·14)．求挖去部分的半徑.

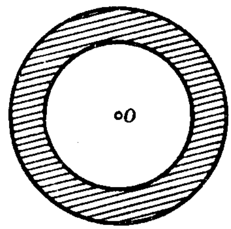


图 5·14

【解】 ∵ 圆形鉄片的周长为 100 cm，

$$\therefore \quad \text{它的半徑}=\frac{100}{2\pi}\text{cm},$$

$$\text{它的面积}=\pi\left(\frac{100}{2\pi}\right)^2\text{cm}^2.$$

設挖去部分的半徑为 x，按題意得，

$$\pi\left(\frac{100}{2\pi}\right)^2-\pi x^2=400.$$

解方程，得
$$x=\sqrt{\left(\frac{100}{2\pi}\right)^2-\frac{400}{\pi}}$$
$$\approx 11.2(\text{cm}).$$

答：挖去部分的半徑約为 11.2 厘米.

例 4．已知正十边形的半徑为 R．求它的內切圓的面积.

【解】 在图 5·15 里，正十边形的边心距 OM 就是內切圓的半徑．依据 § 4·4 例 1，

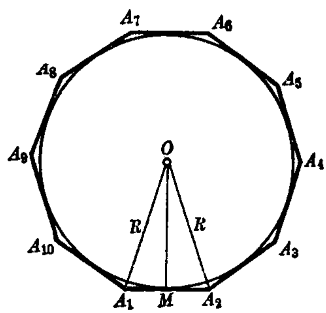


图 5·15

$$A_1A_2=a_{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R,$$

$$A_1M=\frac{A_1A_2}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}R,$$

应用勾股定理，得

$$OA_1^2=A_1M^2+OM^2,$$

就是
$$R^2=\left[\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)R\right]^2+OM^2,$$

$$\therefore \quad OM=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}R.$$

正十边形內切圓的面积$=\pi\cdot OM^2$

$$=\frac{5+\sqrt{5}}{8}\pi R^2.$$

例 5. 已知正三角形,正方形,正六边形、圓的周长都是 a, 比較它們的面积(图 5·16).

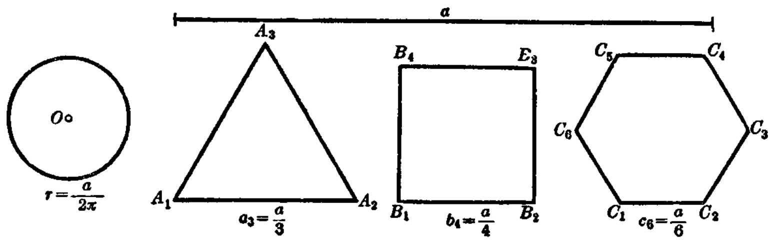


图 5·16

【解】 (1) 設正三角形的一边为 a_3, 那末 $a_3=\frac{a}{3}$. 根据正三角形的面积公式;得

$$\text{正三角形 } A_1A_2A_3 \text{ 的面积}=\frac{\sqrt{3}}{4}a_3^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{36}a^2\approx 0.04811\,a^2.$$

(2) 設正方形的一边为 b_4, 那末 $b_4=\frac{a}{4}$. 根据正方形的面积公式,得

$$\text{正方形 } B_1B_2B_3B_4 \text{ 的面积}=b_4^2=\left(\frac{a}{4}\right)^2=\frac{a^2}{16}=0.06250\,a^2.$$

(3) 設正六边形的一边为 c_6, 那末 $c_6=\frac{a}{6}$. 依据正六边形的面积公式,得

$$\text{正六边形 } C_1C_2C_3C_4C_5C_6 \text{ 的面积}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}c_6^2=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{6}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{24}a^2\approx 0.07217\,a^2.$$

(4) 設圓的半徑为 r, 那末 $r=\frac{a}{2\pi}$. 根据圓的面积公式,得

$$圆 O 的面积=\pi r^2=\pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2=\frac{1}{4\pi}a^2\approx 0.07957a^2.$$

比較它們的面积，得正三角形的积＜正方形的面积＜正六边形的面积＜圆的面积.

注意 例5为一件有用的几何事实提供了綫索. 这件几何事实是："在所有的等周长的平面封閉图形里，以圆的面积为最大". 不过在中学数学的范圍里，我們还不能証明它.

习 题 5·4

1. 已知圆的周长为200厘米. 求这圆的面积.

2. 已知圆的面积为 A. 求这圆的周长.

3. 抽水机活塞的横断面是圆形：(1)已知半徑为10 cm，求它的面积；(2)已知面积为12 cm²，求它的直徑.

4. 如果圆的半徑：(1)增加为原来的1.5倍；(2)减少到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍；(3)增加200%；(4)减少75%. 它的面积怎样变化？

5. 两个同心圆的半徑分别是 R 和 r，求它們所夹的环形的面积.

6. 一正方形的面积为 S，求它的外接圆的面积.

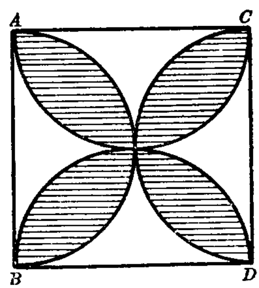
7. 已知圆的周长为 C，求証圆面积 $S=\frac{C^2}{4\pi}$. 如果取 $\frac{25}{8}$ 作为 π 的近似值，那末求面积 S 的公式可以写为 $S=\frac{2}{25}C^2$.

8. 直立在地基上的鍋炉圆筒，它的环形底部的外直徑是78厘米，內直徑是36厘米，筒重752公斤. 求圆筒底部单位面积所分布到的筒重.

[提示：求出筒重和筒接触的地面所占的面积的比.]

9. 以边长为 a 的正方形的各边为直徑，向形內画四个半圆，求所得的四瓣菊形的面积.

[分析：图中阴影部分是所要求的菊形面积，四个半圆都通过正方形的中心. 如果能計算菊形在正方形中留有的空隙部分，那末从正方形面积减去这空隙部分，剩下的就是菊形面积了. 現在正方形共有四块空隙，我們从正方形的面积减去两个半圆的面积就得到两块空隙的面积，然后从正方形面积减去它的两倍，就



(第9题)

得到所求的面积了.

讀者也可以用四个半圓面积减去正方形面积而得到所求的結果，但是这个更簡捷的方法，要仔細地思考它所根据的理由.]

10．求正六边形的內切圓和外接圓面积的比.

11．圓面积是 Q，圓的外切菱形的銳角是 $30°$．求菱形的面积.

[提示：圓的直徑等于菱形的高.]

12．已知正三角形的面积是 Q，求它的外接圓与內切圓間的环形面积.

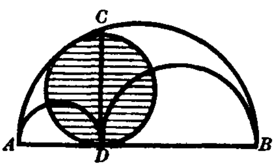
[提示：先求正三角形的高，由此再求出 R 与 r.]

*13．两个同心圓中，外圓的弦切于內圓，已知弦长为 a，求两圓間的环形面积．由此，如果說："圓环的面积，等于以大圓的弦且是小圓的切綫的长为直徑的圓面积." 你认为是否正确?

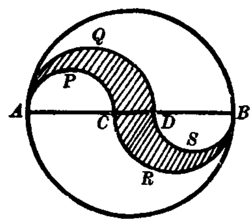
[提示：本題虽不能直接求出两圓的半徑，但可求半徑平方之差.]

14．在半圓上取任意一点 C，引 CD 垂直直徑 AB 于 D．再在半圆內分别以 AD，DB 为直徑作两个半圓．求証：三个半圓間的面积等于以 CD 为直徑所作的圓的面积.

[提示：利用 $CD^2=AD\cdot DB$ 的关系.]



(第 14 題)



(第 15 題)

15．AB 为一圓的直徑．在 AB 上任取 C，D 二点，以 AC 及 AD 为直徑，在 AB 的同旁画半圓 APC，AQD；再在另一旁以 CB 及 DB 为直徑分别画半圓 CRB，DSB．求証由曲綫 $APCRBSDQA$ 所圍成的面积对于圓面积之比，等于 $CD:AB$.

[証：曲綫 $APCRBSDQA$ 圍成的面积＝半圓 AQD 的面积－半圓 APC 的面积＋半圓 CRB 的面积－半圓 DSB 的面积.

半圓 AQD 的面积$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{AD^2}{4}$；半圓 APC 的面积$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{AC^2}{4}$；半圓 BRS 的面积$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{CB^2}{4}$；半圓 BSD 的面积$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{DB^2}{4}$.

但是 $$AD^2=(AC+CD)^2=AC^2+2AC\cdot CD+CD^2,$$
$$CB^2=(CD+DB)^2=CD^2+2CD\cdot DB+DB^2,$$

$\therefore$ 曲線形 $APCRBSDQ$ 的面积 $=\frac{\pi}{8}(AD^2-AC^2+BC^2-BD^2)$

$$=\frac{\pi}{8}(2AC\cdot CD+2CD^2+2CD\cdot DB)=\frac{\pi}{4}(AC+CD+BD)CD$$

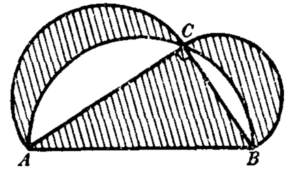
$$=\frac{\pi}{4}AB\cdot CD.$$

已知圓的面积 $=\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}AB^2.$

$\therefore$ 它們面积的比是 $\frac{\pi}{4}AB\cdot CD:\frac{\pi}{4}AB^2=CD:AB.$]

16. 求証以直角三角形斜边为直徑的半圓，等于分别以直角边为直徑的两个半圓的面积的和.

17. 求証图中以直角三角形的斜边为直徑的半圓，与分别以直角边为直徑的半圓所夹的两个鐮刀形的面积的和，等于这直角三角形的面积.



(第 17 題)

18. 作一个圓，使它的面积等于已知二圓面积的和(或差).

19. 作一个圓，使它的周长等于已知二圓的周长的差.

20. 作一个圓，使它的周长等于已知圓的周长的三分之二.

§5·5 扇形的面积

一条弧和經过这条弧的端点的两条半徑所組成的图形叫做**扇形**.

在图 5·17 里，$\overset{\frown}{AmB}$ 和半徑 OA，OB 組成的图形就是一个扇形. $\overset{\frown}{AmB}$ 是扇形的弧，OA 和 OB 是扇形的半徑.

現在已知扇形的弧含有 $n°$，它的半徑是 R，我們来研究怎样計算这个扇形的面积.

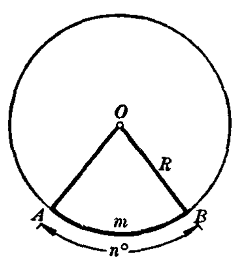


图 5·17

我們先把一个圓分成 360 个等分，每一个等分是含有 $1°$ 的弧，如果經过圓上的 360 个分点，引 360 条半徑，那末就得了 360 个全等的扇形，这些扇形的弧

都是含有 $1°$ 的弧.

我們学习过“全等的图形是等积的”，因此这 360 个扇形是互相等积的，每个扇形的面积是圆面积的$\frac{1}{360}$，就是 $\frac{1}{360}\pi R^2$.

如果扇形的弧含有 $n°$，那末它的面积正好是 $\frac{1}{360}\cdot\pi R^2$ 的 n 倍，从而得扇形面积公式：

$$\textbf{扇形面积}=\frac{n\pi R^2}{360}, \tag{1}$$

这里 n 是扇形弧所含单位弧的度数（或者扇形弧所对圆心角的度数），R 是扇形的半徑.

公式(1)的右端可以写为：$\frac{1}{2}\left(\frac{n\pi R}{180}\right)R$. 依据 §5·2 弧长公式，$\frac{n\pi R}{180}$ 正好是扇形弧的长 l. 因此我們又得下面的公式：

$$\textbf{扇形面积}=\frac{1}{2}lR, \tag{2}$$

这里 l 为扇形的弧长，R 为扇形的半徑.

公式(2)指出：扇形的面积等于它的弧长和半徑的乘积的一半. 公式(2)和三角形面积公式在形式上(仅仅形式上！)有些类似. 三角形的面积等于底和高的乘积的一半，只要把扇形的弧和半徑分别比做三角形的底和高，我們知道了三角形面积公式，就能容易記忆扇形面积計算方法了.

例 1. 在图 5·18 里，$ABB'A'$ 是人行道的轉弯处. 已知 $\overset{\frown}{AA'}$ 和 $\overset{\frown}{BB'}$ 都是 $45°$ 的弧，$\overset{\frown}{AA'}$ 的半徑为 8m，人行道寬 2m. 求 $ABB'A'$ 的面积.

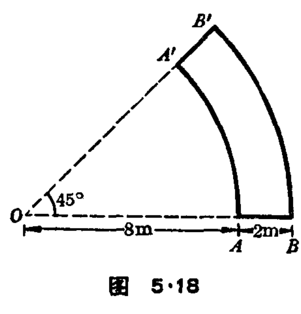


图 5·18

【解】 所求图形的面积是扇形 OBB' 和扇形 OAA' 的面积的差. 依据扇形面积公式(1)，得

$$图形 ABB'A' 的面积=\frac{45\cdot\pi(8+2)^2}{360}-\frac{45\cdot\pi\cdot 8^2}{360}$$

$$=\frac{9}{2}\pi$$

$$\approx 14(\mathrm{m}^2).$$

答：图形 $ABB'A'$ 的面积約为 14 平方米.

例 2. 在图 5·19 里，$A_1A_2\cdots A_6$ 是正六边形，它的一边为 a. 以每个頂点为圆心，$\frac{a}{2}$ 为半徑作六个圆弧. 求这些圆弧所圍成的阴影部分的面积 S.

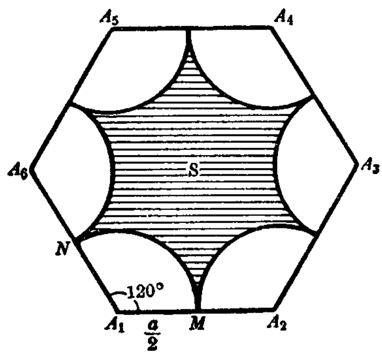


图 5·19

【解】 要求的面积 S，显然是正六边形 $A_1A_2\cdots A_6$ 的面积和六倍扇形 A_1MN 的面积的差. 根据正六边形的面积公式和扇形面积公式(1)，得

$$S=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-6\cdot\frac{120\cdot\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{360}$$

$$=\frac{1}{2}(3\sqrt{3}-\pi)a^2\approx 1.03\,a^2.$$

例 3. 已知扇形面积为 150 cm²，半徑为 10 cm. 求扇形弧的度数.

【解】 依据扇形面积公式(1)，得

$$150=\frac{n\cdot\pi\cdot 10^2}{360},$$

$$\therefore \qquad n=\frac{150\times 360}{\pi\cdot 100}\approx 172.$$

答：扇形弧約为 172°.

例 4. 已知扇形的弧为 75°，面积为 100 cm². 求扇形的周长(图 5·20).

【解】 設扇形的半徑为 R. 依据 § 5·2 弧长公式，得

$$l=\widehat{AB}\text{ 的长}$$

$$=\frac{75\cdot\pi R}{180}.$$

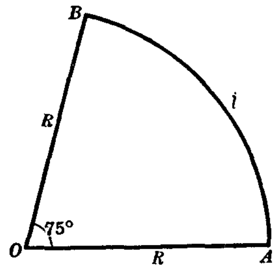


图 5·20

依据扇形面积公式(1)，得

$$100=\frac{75\cdot\pi R^2}{360}.$$

从而 $$R^2=\frac{100\times 360}{75\pi},\quad R=12\sqrt{\frac{10}{3\pi}}.$$

$$\therefore\quad \text{扇形的周长}=2R+l$$

$$=2R+\frac{75\cdot\pi R}{180}$$

$$=\left(2+\frac{75\pi}{180}\right)\cdot R$$

$$=\left(2+\frac{75\pi}{180}\right)\cdot 12\sqrt{\frac{10}{3\pi}}$$

$$\approx 41(\text{cm})$$

答：扇形的周长約为 41 cm。

习 题 5·5

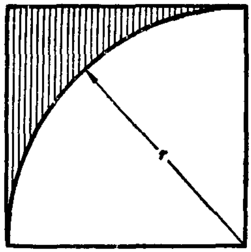
1. 已知扇形的半徑为 R，面积是 S. 求它的圆心角的度数.

2. 已知扇形的半徑为 R，扇形的圆心角等于 α 弧度. 求証这个扇形的面积是 $\frac{1}{2}\alpha R^2$.

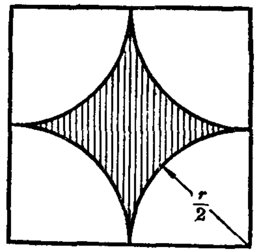
3. 已知扇形的周长(两半徑与弧的和)等于 30 厘米，面积为 31.25 平方厘米. 求它的半徑.

4．求下列图形中阴影部分的面积：

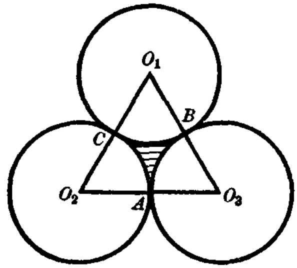
(1)



(2)



5．三个半徑都等于 R 的圓两两外切．求切点間的弧所圍成的图形的面积。



(第5題)

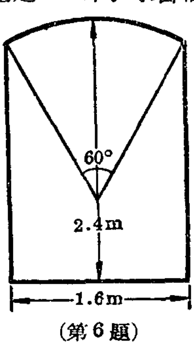
[解：設三个等圓分别外切于 A, B 和 C. 連接三个圓心的綫段 O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 都等于 $2R$, 因此 $\triangle O_1O_2O_3$ 是正三角形.

$$\therefore\quad \triangle O_1O_2O_3\text{的面积}=\frac{\sqrt{3}}{4}(2R)^2=\sqrt{3}R^2.$$

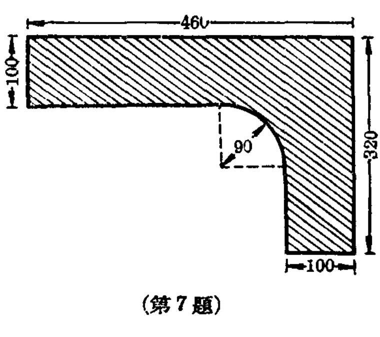
由于扇形 O_1BC, O_2CA 以及 O_3AB 的半徑都是相等的，它們的圓心角都是 $60°$，所以它們的面积都是：

$\frac{60\pi R^2}{360}=\frac{\pi}{6}R^2$. $\therefore$ 三切点間的弧所圍成的面积 $=\sqrt{3}R^2-3\cdot\frac{\pi}{6}R^2$ $=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)R^2\approx0.16R^2$.]

6．窗框的上边是 $60°$ 的弧，窗高(从弧的中点到底所引垂綫的长)是 2.4 米，窗寬是 1.6 米．求窗框內的面积.



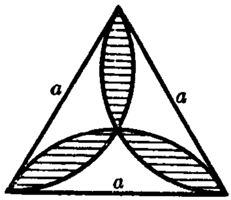
(第6題)



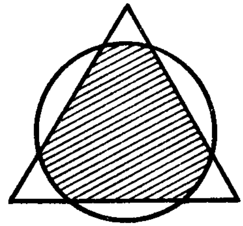
(第7題)

7. 求图示鋼材横断面的面积(长度单位是 mm)。

8. 正三角形的边长为 a, 过每两个頂点和三角形的中心在形內作弧, 求所得菊形(图中阴影部分)的面积。



(第 8 題)



(第 9 題)

*9. 正三角形的边长为 a, 以它的中心为圓心作圓, 使所作的圓在各边上所截的弦对 $90°$ 的圓心角. 求三角形与圓公共部分的面积.

[提示: 圓心到三角形的各边的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{6}a$, 圓的半徑是以 $\frac{\sqrt{3}}{6}a$ 为腰的等腰直角三角形的斜边.]

10. 求作一个圓, 使它內切于已知扇形。

§5·6 弓形的面积

一条弧和它所对的弦組成的图形叫做**弓形**。

在图 5·21 里, $\overset{\frown}{AmB}$ 和它所对的弦 AB 組成的图形就是弓形。現在我們来研究怎样計算弓形的面积。

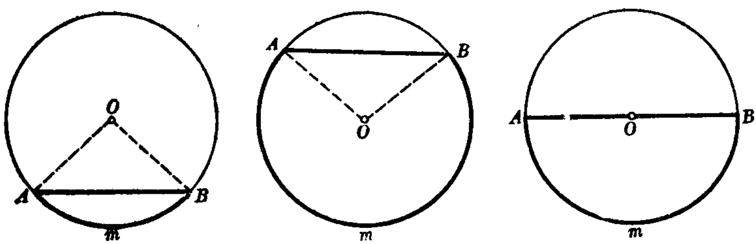


图 5·21

(1) 在图 5·21(1) 里, $\overset{\frown}{AmB}$ 小于半圓. 引半徑 OA 和 OB, 显然弓形 AmB 的面积是扇形 $OAmB$ 的面积和三角形 OAB 的面积

的差.

(2) 在图 5·21(2)里，$\overset{\frown}{AmB}$ 大于半圆. 引半徑 OA 和 OB. 显然弓形 AmB 的面积是扇形 $OAmB$ 的面积和三角形 OAB 的面积的和.

(3) 在图 5·21(3)里，$\overset{\frown}{AmB}$ 等于半圆. 这时弓形 AmB 的面积等于圆面积的一半.

从上面的討論，可見弓形的面积可以在計算扇形面积和三角形面积的基础上求得.

例 1. 弓形 AmB 的弧含有 $60°$，$\overset{\frown}{AmB}$ 所对的弦为 a. 求弓形 AmB 的面积(图 5·22).

【解】 引半徑 OA 和 OB. 弓形 AmB 的面积等于扇形 $OAmB$ 的面积和三角形 OAB 的面积的差. 容易看出，三角形 OAB 为正三角形，所以半徑 $OA=AB=a$.

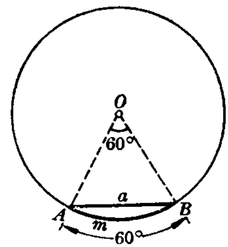


图 5·22

根据扇形面积公式和正三角形面积公式，得

$$\text{弓形 } AmB \text{ 的面积} = \frac{60\pi a^2}{360} - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$= \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2.$$

例 2. 弓形 AmB 的弧含有 $240°$，$\overset{\frown}{AmB}$ 所对的弦为 a. 求弓形 AmB 的面积(图 5·23).

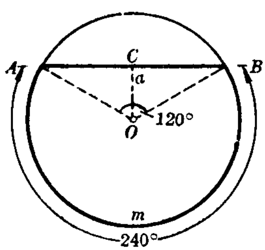


图 5·23

【解】 引半徑 OA 和 OB. 弓形 AmB 的面积等于扇形 $OAmB$ 的面积和三角形 OAB 的面积的和. 容易看出，等腰三角形 OAB 的頂角为 $120°$. 作 $OC \perp AB$，在直角三角形 OAC 中，銳角 $AOC=60°$. 利用一个銳角为 $60°$ 的直角三角形的性

质，容易算出 $AC=\frac{a}{2}$，$OC=\frac{\sqrt{3}}{6}a$，$OA=\frac{\sqrt{3}}{3}a$. 根据扇形面积公式和三角形面积公式，得

$$弓形 AmB 的面积=\frac{240\pi\cdot OA^2}{360}+\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OC$$

$$=\frac{240\pi}{360}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2+\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$=\frac{2}{9}\pi a^2+\frac{\sqrt{3}}{12}a^2=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2.$$

例3. 在图5·24里，直径 $AB\perp$直徑 CD. 以 C 为圆心，CA 为半徑作 $\overset{\frown}{AEB}$. 求証月牙形 $ADBE$ 的面积(阴影部分)等于三角形 ADB 的面积.

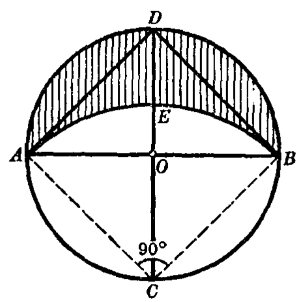


图 5·24

【証】 設圓的半徑为 R，那末 $CA=\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{2}R$. $\angle ACB$ 是半圓上的圓周角，所以是 $90°$.

月牙形 $ADBE$ 的面积

$$=半圓 ADB 的面积+\triangle ACB 的面积-扇形 CAEB 的面积$$

$$=\frac{1}{2}\pi R^2+\triangle ACB 的面积-\frac{90\pi\cdot(\sqrt{2}R)^2}{360}$$

$$=\frac{1}{2}\pi R^2+\triangle ACB 的面积-\frac{1}{2}\pi R^2$$

$$=\triangle ACB 的面积.$$

但是 $\triangle ACB\cong\triangle ADB$，

$\therefore\triangle ACB$ 的面积$=\triangle ADB$ 的面积，

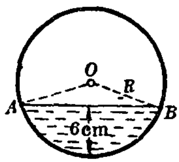
从而，

月牙形 $ADBE$ 的面积$=\triangle ADB$ 的面积.

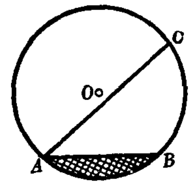
习 题 5·6

1．在半徑是 8 厘米的圓中，已知弓形的弧的度数如下，求弓形的面积：(1) 60°；(2) 90°；(3) 120°；(4) 240°.

2．一个水平放着的圓形排水管，半徑是 $R=12$ cm，里面有高 6 cm 的水．求截面有水部分的面积．



(第 2 题)

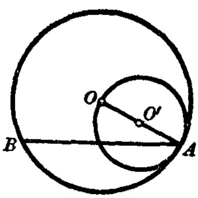


(第 3 题)

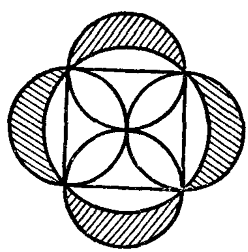
3．如图．$\overset{\frown}{AC}=2\overset{\frown}{AB}$，求証以 AB 为弦，$\overset{\frown}{AB}$ 为弧的弓形面积等于 $\frac{1}{2}R\left(\overset{\frown}{AB}-\frac{AC}{2}\right)$；其中 R 为圓的半徑．

4．扇形面积公式如果采用 $\frac{1}{2}\alpha R^2$ 时（习题 5·5 第 2 题），那末弓形面积可以怎样表示？

5．在圓 O 中，引弦 AB，以 OA 为直徑作圓 O'．那末圓 O 与圓 O' 被 AB 所截成的两个弓形面积的比为 4:1．



(第 5 题)

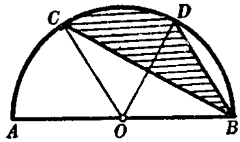


(第 6 题)

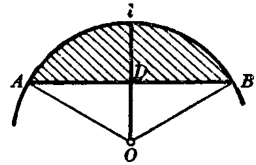
6．以圓內接正方形的各边为直徑，向形外各作半圓，則这四个半圓与圓所圍成的四个新月形面积之和（图中阴影部分）等于正方形的面积．

7．分半圓 AB 于 C 和 D，使 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$．已知圓的半徑为 R，求图中曲綫形 BCD（阴影部分）的面积．

[提示：連結 OC, OD. 看扇形 COD 与曲綫形 BCD 是否是等积形.]



(第7題)

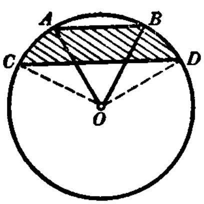


(第8題)

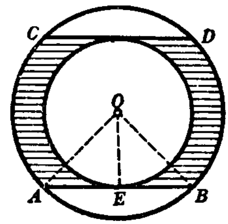
8. 弓形的弦长为 a, 所張的角为 $120°$. 求这弓形的面积.

[解：設 D 为弦 AB 的中点. 已知 $\angle AOB=120°$, $\therefore \angle AOD=60°$. 由于 $AB=a$, 所以 $AD=\frac{1}{2}a$, 并且 $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}OA$, $\therefore OA=\frac{2}{\sqrt{3}}AD=\frac{\sqrt{3}}{3}a$, $\therefore$ 扇形 $AOBlA$ 的面积 $=\frac{120\pi}{360}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2=\frac{\pi}{9}a^2$. 再看 $\triangle AOB$ 的面积 $=\frac{1}{2}OD\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AO\cdot AB=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{3}a\cdot a=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2$. $\therefore$ 弓形 $ABlA$ 的面积 $=\frac{\pi}{9}a^2-\frac{\sqrt{3}}{12}a^2=\frac{1}{36}(4\pi-3\sqrt{3})a^2\approx 0.205a^2$.]

9. 圓的半徑是 R, 在圓心的一旁引两条平行的弦, 它們所对的圓心角分别为 $120°$ 与 $60°$. 求这两条平行弦在圓内所夹的面积.



(第9題)



(第10題)

10. 在两个同心圓中，小圓将大圓的面积两等分. 求証环形夹于小圓两平行切綫間的部分的面积，等于小圓的内接正方形的面积.

本章提要

1. 概念 圓周率，圓周长，弧度，弧长，圓面积，扇形和弓形的面积.

$$1\text{弧度}=\frac{180°}{\pi},\quad 1°=\frac{\pi}{180}\text{弧度}$$

2. 計算 本章的計算的公式，主要是在圓周长的基础上建立起来的，用

以解决：圆半径 R，圆周长 C，弧长 l，圆心角的度数 n（或用弧度制），弦的长 a，圆面积 A，扇形面积 Q 以及弓形面积 D 等相互間的一些計算問題.

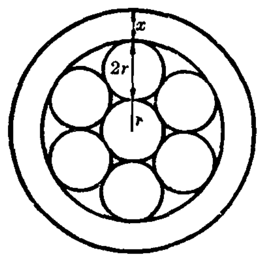
例如，已知周长 C，圆面积 $A=\frac{C^2}{4\pi}$. n, l, R 中任意知道某两个，可以由 $n:360=l:2\pi R$ 来求得另一个.

复 习 題 五

1. 已知圓的周长比它的直徑长 107 厘米，求这个圓的半徑.

2. 某游泳池中間部分是一个矩形，两端都是弓形弧. 已知矩形长 35 米，寬 10 米；弓形弧所对的圆心角是 120°. 求这个游泳池的周长.

（第 2 題）



（第 4 題）

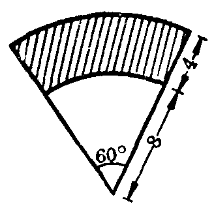
3. 在圓 O 中，两条半徑 OA, OB 所夹的弧 $\overset{\frown}{AB}=120°$. 过 A 和 B 分别作圆的切綫，这两条切綫相交于 C. 以 C 为圓心，作弧和 $\overset{\frown}{AB}$ 相切，分别交 AC, BC 于 D 和 E. 求扇形 DCE 和扇形 AOB 面积的比.

4. 七个等圓相切，被紧套于一圓环中，已知七个等圓面积的和等于圆环的面积. 求証圓环的寬与圓的半徑相等.

［証明：設七个等圓的半徑为 r，圓环的寬为 x. 因为圓心、切点都在一直綫上，可知圓环的內圓半徑为 $3r$，外圓半徑为 $x+3r$. 于是得到圓环的面积是 $\pi(x+3r)^2-\pi(3r)^2=\pi(x+6r)x$. 但等圓的面积之和是 $7\pi r^2$，所以有方程：$\pi(x+6r)x=7\pi r^2$，也就是 $x^2+6rx-7r^2=0$.
解出这个方程，得到 $x=r$.］

5. 滑輪以角速度 $\omega=\frac{2}{9}\pi$ 弧度/秒旋轉，轉一周要几秒？（角速度概念見习題 5·3，第 6 題.）

6. 道路的拐弯处为一弧形，已知路寬 4 米，內弧半徑是 8 米，弧所对的圓心角是 60°. 求这段路的面积.

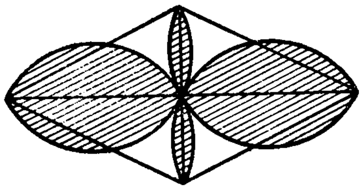


（第 6 題）

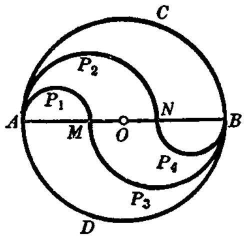
7. 一鉄道轉弯处成一圓弧，它的半徑是1.5公里，一列車以每小时30公里的速度在上面行駛，10秒間轉过多少度?

8. 过半徑为 r 的弧 ACB 的两端点 A 和 B 各引切綫，这两条切綫相交于 D. 若弧所对的圓心角为：(1) 90°; (2) 120°; (3) 60°. 求两条切綫和 $\widehat{ACB}$ 所包圍的面积.

9. 以菱形的各边为直徑向菱形內各作一半圓，已知二对角綫的长各是 a, b. 求所成四个叶形的总面积.



(第9題)

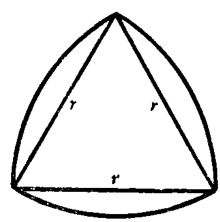


(第10題)

10. 把圓的直徑分为三等分，以直徑的一端与各分点間的綫段为直徑，在直徑的上方分别作半圓. 再以直徑的另一端与各分点間的綫段为直徑，在直徑的下方分别作半圓. 求証这些半圓把圓分成三个等积形.

[提示：設 M 与 N 是直徑 AB 上的分点，只要能够証明曲綫形 AP_2NP_4BC 的面积＝曲綫形 $ADBP_3MP_1$ 的面积＝$\frac{1}{3}$ 全圓的面积就可以了.]

11. 設三弧的半徑皆为 r，各弧的圓心分别是其他二弧的交点. 求这三弧所圍成的面积.



(第11題)

12. 点 B 分已知圓 O 的半徑 OA 成中外比，以 OB 为半徑作一同心圓，那末它把已知圓的面积分为中外比.

[提示：分已知綫段为中外比見 §2·8 例3，本題只要能够証明圓环的面积是二圓面积的比例中項就可以了.]

13. 作一个圓，使它的面积等于已知圓面积的 $\frac{m}{n}$(設 $m=2$, $n=3$).

14. 作一个已知圓的同心圓，使它分已知圓为两个等积形.

15. 求作一个圓，使它的面积等于两个已知同心圓間所夹环形的面积.

总复习题

1. 在$\triangle ABC$中，AD为边BC上的中綫，M为AD上的任意一点．过M作$EF\parallel BC$，EF交AB于E，交AC于F．求証$EM=MF$．

2. AD为$\triangle ABC$的边BC上的中綫，DM与DN分别为$\angle ADB$和$\angle ADC$的平分綫，并且M和N分别是AB与AC上的点．求証$MN\parallel BC$．

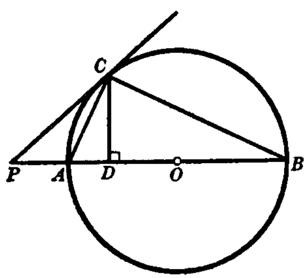
3. 从等腰三角形ABC的頂点A引直綫，和底边BC相交于D，和外接圓相交于E．求証AB为AD与AE的比例中項．

4. "平行綫截得比例綫段定理"是否有逆定理？举例說明．

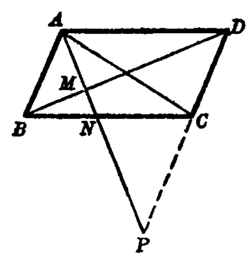
5. 等腰三角形ABC中，$AB=BC=6\,\text{cm}$，$AC=3\,\text{cm}$．D，E分别是AB和BC上的点，并且$DE\parallel AC$，$DE=AD+EC$，求梯形$ADEC$的各边的长．

6. 如图．已知割綫PAB經过圓心O，PC切圓O于C，$CD\perp AB$于D．求証$PA:AD=PB:BD$．

[提示：証明CA是$\angle PCD$的平分綫．]



(第6题)



(第10题)

7. 設$\triangle ABC$的垂心为H；D，E和F是三条高的垂足．連結EF交AD于G．証明綫段GD被H，A按同比内分与外分．

[提示：設法利用$\triangle DEF$的角平分綫的性质．]

8. 已知两圓外离(二半徑不相等)，求証两条內公切綫的交点，以及外公切綫的交点在两圓的連心綫上．

9. 已知两个三角形中，各有两边和第三边上的中綫都对应成比例，求証

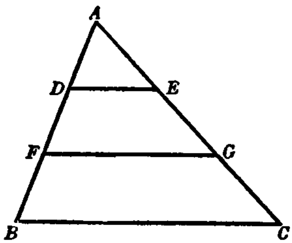
这两个三角形相似.

10. 过平行四边形的頂点 A, 引任意直綫与对角綫 BD, 直綫 BC 和 CD 分别相交于 M, N 和 P 各点. 求証 AM 为 MN 和 MP 的比例中項.

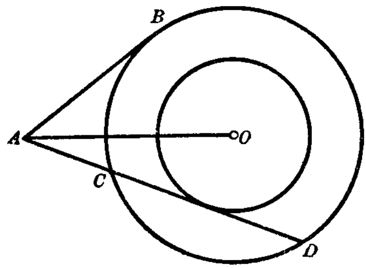
[提示: 如图. 找出它們与 $BM : MD$ 的关系.]

11. 如图. 已知 $AD=FB$, $DE \parallel FG \parallel BC$. 求証:

(1) $DE+FG=BC$;　　(2) $\dfrac{\text{四边形 } DFGE \text{ 的面积}}{\triangle ABC \text{ 的面积}}=\dfrac{DF}{AB}$.



(第 11 題)



(第 13 題)

12. 同圓中的两弦 AB 和 CD 相交于 M, 弦 AB 被 M 分为 2:3 两段, 弦 CD 被 M 分为 1:6 两段. 已知 AB 弦长 30 厘米, 求 CD 弦的长.

13. 如图. O 是两同心圓的圓心, AB 切大圓于点 B, 小圓的切綫 AD 交大圓于 C, D 两点. 已知 $AB=12$ cm, $AO=15$ cm, $AC=8$ cm. 求两圓的半徑.

14. 作一个四边形, 使它和一个已知四边形相似, 并且使

(1) 周长的比是 3:2;　　(2) 面积的比是 1:3.

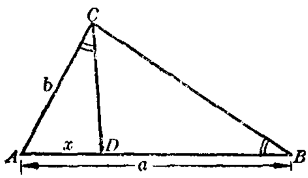
*15. 用位似作图法来解: 求作一直綫与 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 分别交于 D 和 E, 使 $DE=BD=CE$.

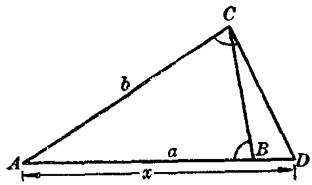
16. 已知 $\triangle ABC$ 的三边为 a, b 和 c. 試計算三角形的每一条角平分綫分对边所得的两綫段的长.

*17. 求証梯形的两腰延长綫的交点, 两底中点和对角綫交点在一条直綫上.

18. 两圓 O 及 O' 外切于 P, 外公切綫分别切两圓 O, O' 于 A, B, 内公切綫 PM 交 AB 于 M. 求証四边形 $OPMA \backsim$ 四边形 $MPO'B$.

19. 如果已知綫段为 a 和 b, 要作綫段 x, 使 $x=\dfrac{b^2}{a}$ (即 $a:b=b:x$). 我們只要任意作一个 $\triangle ABC$, 使 $AC=b$, $AB=a$; 过 C 作 CD 交 AB 或其延长綫于 D (如附图), 使 $\angle ACD=\angle B$, 那么 AD 就是所求的綫段 x. 这样作的





(第 19 题)

根据是什么?

20．已知单位綫段为 u，求作等于 $\sqrt{11}u$，$\frac{1}{2}\sqrt{5}u$，$\frac{3}{5}\sqrt{6}u$ 的綫段.

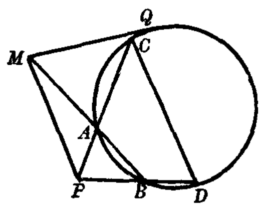
*21．在矩形 $ABCD$ 内作两个互相外切的等圆，使各切于矩形的对角 $\angle A$ 和 $\angle C$ 的两边.

[提示：矩形的二边为 a，b，圆半徑为 x. 利用二圆外切的关系和勾股定理列出方程，解出 x.]

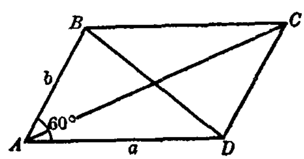
22．設 A 为圆 O 外的定点，試由 A 作圆 O 的割綫，使它的圆外部分和圆内部分之差等于已知长 d.

*23．M 是圆外一点，MQ 切圆于 Q. 过 M 作綫段 $MP=MQ$，过 P 任作这圆的割綫交圆于 A 和 C. 再作直綫 MA 交圆于 B. 連結 PB，并延长使交圆于 D，連結 CD. 求証 $CD \parallel MP$.

[提示：証明 $\triangle MPA \backsim \triangle MBP$，然后再利用平行綫的判定定理.]



(第 23 题)



(第 24 题)

24．已知 ▱$ABCD$ 中(如图)，$\angle A=60°$，对角綫 AC 与 BD 的平方之比为19∶7. 求 ▱$ABCD$ 的两条邻边之比.

[提示：▱$ABCD$ 中，$AC>BD$. $AC^2=a^2+b^2+ab$，$BD^2=a^2+b^2-ab$. $\because \frac{AC^2}{BD^2}=\frac{19}{7}$，因此可由 $\frac{a^2+b^2+ab}{a^2+b^2-ab}$ 来求两邻边 a 与 b 的比.]

25．已知一矩形的两边分别等于 2 厘米和 24 厘米，另一矩形与这矩形等积，邻边的比为 3∶4. 求此矩形的边长.

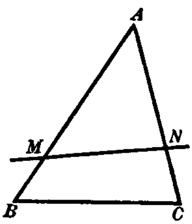
26. 边长等于12厘米的等边三角形内一点，至三边距离的比等于1∶2∶3. 求此点至三边的距离各为多少厘米?

27. 求作一个三角形，使它和两个已知的相似三角形相似，并且面积等于它們面积的和.

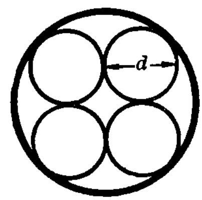
28. 作平行于梯形底的直綫，将梯形的面积二等分.

29. 求作一直綫，平分已知三角形的周长及面积.

[提示：如图. 假設直綫 MN 是所求，应有 $\triangle AMN$ 的面积 $=\frac{1}{2}\triangle ABC$ 的面积，而且 $AM+AN=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$. 如果 $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, $AM=x$, $AN=y$. 注意 x, y 与 a, b, c 有何关系? 利用 $\frac{xy}{bc}=\frac{1}{2}$, $x+y=\frac{1}{2}(c+a+b)$ 可求 x, y.]



(第29题)



(第30题)

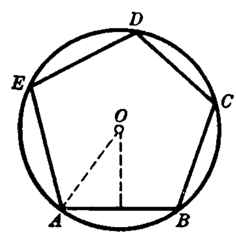
30. 要在一个圓环中恰好装上四个直徑是 d 圓盘，求这圓环的直徑.

31. 菱形的两对角綫之比等于 $1\frac{1}{2}:2$，周长为40厘米. 求此菱形的面积和高.

*32. 作已知圓的外切正十边形.

*33. 圓的半徑为4厘米，求内接正五边形的面积.

[提示：已知 $R=4\text{ cm}$. 以 R 表示 a_5 后卽知周长. 再根据勾股定理求出边心距. 最后用面积公式卽得.]



(第33题)

34. 自正多边形内的任意一点到各边距离的和，对这个多边形来說，是一个定値.

35. 在含有120°的弧的弓形内，一圓分别与弓形的弧和弦相切于它們的中点. 求証这圓的周长等于弓形的弧长的 $\frac{3}{4}$.

36. 已知两同心圓，且大圓中与小圓相切的弦等于6厘米. 求这两个圓

周所成的环形的面积.

37. 已知圆的面积是 A, 它的内接矩形的两条邻边的比是 $m:n$. 求这矩形的面积.

*38. 求分通过一已知圆上一已知点所引各弦成 $m:n$ 的比的点的軌迹.

*39. 已知 M 和 N 是四边形 $ABCD$ 的两对角綫 AC 和 BD 的中点. 求証 $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2+4MN^2$. 当 M 与 N 重合时,結果又如何?

[提示: 要設法利用三角形中的中綫公式.]

40. 将圆的直徑分为 n 等分, 設分点为 $P_1, P_2, \cdots$, 在 AB 的一側以 $AP_1, AP_2, \cdots$为直徑作半圓,再在另一側以 $BP_1, BP_2, \cdots$为直徑作半圓,在这些分点中,任取两个分点 P_m 与P_{m+1}. 求証:

(1) 图形 AP_mBP_{m+1} 的周长等于圓周的长.

(2) 图形 AP_mBP_{m+1} 的面积等于圓面积的$\frac{1}{n}$.

41. 直角三角形繞着直角頂点旋轉 90°, 求証两直角边旋轉而得出扇形面积的和,等于这三角形外接圓的面积.

[提示: 这两扇形的半徑分别是两条直角边, 圓心角是 90°, 而斜边正是外接圓的直徑.]

习 题 答 案

第 一 章

习题1·1 1. 不一定是有理数; 2. 3.6; 4. 不一样; 5. $a:b=5:4$,它們的比沒有变化; 7. 第一个分点把全綫段分成1与5之比,第二个分点恰是已知綫段的中点; 8. AC与CB分别长19.2厘米,28.8厘米; 9. 延长AB至C,使BC长8厘米; 10. $3:5$和$5:2$.

习题1·2 5. (1) $2:9$, (2) $1:6$, (3) $n:m$, (4) $3:2$, (5) $1:1$; 7. (1) $x=6$, (2) $x=4$, (3) $x=8a$, (4) $x=\frac{10}{3}$, (5) $x=3\sqrt{3}ab$; 8. (1) $x=3$, (2) $x=\frac{2b}{a+b}$, (3) $x=12.5$, (4) $x=\frac{3b}{a-b}$; 9. 是成比例的綫段; 13. (1) $1:4$, (2) $2:1$, (3) $34:25$, (4) $a:b$或$c:d$; 15. (1) $1:3$和$2:3$, (2) $m:m+n$和$n:m+n$; 17. $AD=18\text{ cm}$, $DB=12\text{ cm}$; 18. 21 cm; 19. $AB=120\text{ cm}$, $CB=72\text{ cm}$; 20. $d=10\text{ cm}$.

习题1·3 1. (1) 平行, (2) 平行, (3) 不平行; 5. 不正确; 11. $AB'=6\text{ cm}$, $B'C'=10\text{ cm}$, $C'D'=12\text{ cm}$; 13. $AB=80\text{ m}$; 14. 44厘米; 15. (1) 14.4厘米, (2) 2.8厘米, 4.2厘米, 3.6厘米, 5.4厘米.

习题1·5 6. (1) $AD=8\text{ cm}$, $DC=12\text{ cm}$, (2) $BC=10\text{cm}$, (3) $AC=1.8\text{ cm}$; 7. 第三边为10厘米,如果为15厘米,与已知条件矛盾; 8. $AO:OD=b+c:a$; 9. (1) 是, (2) 不是, (3) 不是, (4) 不是; 10. $BN=10.5\text{ cm}$, $NC=7.5\text{ cm}$; 11. $AE=DE=6\text{ cm}$, $EC=4\text{ cm}$; 12. $MN=\frac{ab}{a+b}$.

习题1·6 1. 不都是相似的; 3. 相似的; 6. 不相似; 7. $\sqrt{ab}$厘米; 8. $AD=80\sqrt{2}\approx113$ (厘米); 9. $AE=\frac{b^2}{a}\text{ dm}$.

习题1·7　13．5厘米和12.5厘米；　14．$A'B'=5\,\text{cm}$；　15．$DC=9\,\text{cm}$；　16．$\frac{lm}{l+m}$；　17．42 dm；　18．7.2 cm；　19．3厘米和1.5厘米.

习题1·8　6．42.0米(准确到0.1)；　7．3.6米(准确到0.1)；　8．$\frac{m}{n}(b-a)+a=16.15\,\text{m}$；　10．島高270尺，$HB$为400尺.

习题1·9　8．$DE=1.25\,\text{m}$；　9．$OD=6\,\text{cm}$.

习题1·10　4．$AC=20\,\text{cm}$，$EF=15\,\text{cm}$；　5．$BE=4.5\,\text{cm}$.

习题1·11　4．$A'B'=18\,\text{m}$，$B'C'=9\,\text{m}$，$C'D'=12\,\text{m}$，$D'A'=36\,\text{m}$；　5．$A'B'=30\,\text{cm}$，$B'C'=22.5\,\text{cm}$，$C'D'=13.5\,\text{cm}$，$D'A'=12\,\text{cm}$；　6．200米和80米；　7．$\frac{ap}{a+b}$和$\frac{bp}{a+b}$；　8．$\frac{145\,m}{m+n}$厘米和$\frac{145n}{m+n}$厘米；　9．$\frac{pd}{p-q}$和$\frac{qd}{p-q}$厘米$(p>q)$，$\frac{pd}{q-p}$和$\frac{qd}{q-p}$厘米$(q>p)$；　10．54厘米.

习题1·13　2．不是位似三角形；　4．应該补充一个有关的固定綫段，如三角形的某一边或角平分綫，高，……等，才能使这样的三角形的大小也固定下来.

复习题一

8．30 cm和40 cm；　11．4厘米；　12．$\frac{na+mb}{m+n}$；　13．$\frac{ac}{b+c}$及$\frac{ab}{b+c}$；　15．$11\frac{1}{9}$厘米；　16．菱形的边长是两綫段p与q的比例中項；　17．$R=26\,\text{cm}$，$r=10\,\text{cm}$；　18．$10\sqrt{15}$厘米≈38.7厘米；　19．$OM=\frac{R(R+r)}{R-r}$；　22．6米；　28．$r=\frac{ah}{2h+a}$.

第　二　章

习题2·1　1．由三角形的頂点向对边作垂綫；　2．利用直角三角形中30°角的对边；　5．$BD=6\,\text{cm}$，$AB=2\sqrt{13}\,\text{cm}$，$BC=3\sqrt{13}\,\text{cm}$；　6．直角边在斜边上的射影为9厘米和16厘米，斜

边上的高为12厘米； 7. $AD=1\frac{12}{13}$ dm, $CD=4\frac{8}{13}$dm, $AC=5$ dm; 8. $BD=144$ mm, $AB=169$ mm, $AC=65$ mm, $BC=156$ mm.

习题2·2 1. $10\sqrt{2}$ 厘米； 2. $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$; 3. 3厘米； 4. $\frac{\sqrt{2}}{2}c$; 5. (1) $c=20, h=9.6, p=12.8, q=7.2$, (2) $b=12$, $h=4\frac{8}{13}, p=1\frac{12}{13}, q=11\frac{1}{13}$, (3) $a=31\frac{7}{8}$, $c=36\frac{1}{8}$, $p=28\frac{1}{8}$, $q=8$, (4) $a=10\sqrt{61}, b=12\sqrt{61}$, $h=60, q=72$, (5) $a=\sqrt{10}, b=3\sqrt{10}, c=10$, $h=3$, (6) $b=4$, $c=5$, $h=2.4$, $q=3.2$, (7) $a=9\sqrt{13}, b=6\sqrt{13}, c=39$, $p=27$, (8) $b=9, p=39\frac{1}{41}$, $q=1\frac{40}{41}$, $h=8\frac{32}{41}$; 6. 3.2米； 7. $d=425$ mm; 8. 173 cm; 9. $a=3$, $b=4$, $c=5$; 10. $9\frac{1}{6}$尺.

习题2·3～2·4 1. (1) $a=7$, (2) $a=5$, (3) $a=21$, (4) $a=\sqrt{29}$, (5) $a=10$; 2. (1) $a=14$, (2) $a=26$, (3) $a=21$, (4) $a=43$; 3. $\sqrt{25-12\sqrt{3}}$; 4. 6.6 cm; 5. $b=\sqrt{13-6\sqrt{2}}$ dm; 7. 70厘米； 8. 61米； 10. $a=6.5$ m; 12. (1) 是鈍角三角形, (2) 是銳角三角形, (3) 是直角三角形, (4) 是鈍角三角形, (5) 是直角三角形, (6) 是銳角三角形； 13. $\sqrt{13}$ 厘米和 $\sqrt{37}$厘米； 14. $\sqrt{\frac{l_1^2+l_2^2-2a^2}{2}}$.

习题2·5 1. 11厘米； 2. 9厘米； 3. 51.15分米； 5. (1) 8, (2) 12, (3) 10.34, (4) 12, (5) 36; 6. 4.8分米； 7. 2.4, $\sqrt{23.4}$, $\sqrt{13.6}$; 8. (1) 8.5, (2) 10.6.

习题2·6 1. (1) $AE=8$ cm, (2) $DE=9$ cm; 3. $CD=6$ cm, $AB=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$; 4. 約有3940公里； 5. R 为21厘米.

习题2·7 2. 8厘米和24厘米； 3. 24厘米； 6. $a=R-\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-b^2}$; 7. 52.5毫米或32.5毫米.

复习题二

1. $CM=\frac{bc}{2c\pm a}$; 2. 1厘米和4厘米； 4. $(20\sqrt{5}-30)$ 厘米,

$20\sqrt{5}$ 厘米； 5. $r=6\,\text{dm}$； 6. 200 毫米； 7. $3\sqrt{10}$ 分米或 $\sqrt{10}$ 分米； 8. 13 厘米，14 厘米和 15 厘米； 9. (32 ± 18) 厘米；
10. 25.2 米和 19.8 米； 11. 是直角三角形，只要求出斜边上的高；
13. 38 分米和 22 分米； 14. 27 分米和 64 分米；
15. $\frac{4}{5}\sqrt{5}\,R$； 16. $O_1O_2=\sqrt{R^2+3r^2}$； 17. $12\sqrt{2}$ 厘米；
18. $\sqrt{a^2+b^2-ab}$，$\sqrt{a^2+b^2+ab}$； 19. $R=20\,\text{cm}$； 20. $\frac{a}{2}$；
27. $AB=2\sqrt{r_1r_2}$，$BC=2r_2\sqrt{\frac{r_1}{r_1+r_2}}$，$AC=2r_1\sqrt{\frac{r_2}{r_1+r_2}}$.

第 三 章

习题 3·1 2. 是等积形，因为 $\triangle ADD'\cong\triangle BCC'$.

习题 3·2 2. (1) 为原面积的 9 倍或 $\frac{4}{9}$ 倍，(2) 使各边为原正方形的 2 倍或 $\frac{1}{5}$； 3. 2186.25 米； 4. 132.7 丈； 5. $\frac{l^2}{2}$ 平方米；
6. 2.8 米； 7. 75 米； 8. 約 28.5 丈； 9. (1) $2ab-a^2$，(2) $ah+t(b-a)$，(3) $ad+2t(b-a)$，(4) $dh+2t(b-d)$.

习题 3·3 1. 面积的变化与高成正比； 2. $15\,\text{cm}^2$，能画无数多个；
3. 9.7 米； 7. 30 厘米； 8. (1) $\frac{1}{2}ab$，(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}ab$，(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}ab$； 9. 30°.

习题 3·4 2. mh； 3. $\frac{1}{2}a\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$； 4. $\frac{\sqrt{3}}{3}h^2$；
5. 10.4 米； 7. 24 厘米； 18. 9.6 厘米； 19. 6 平方厘米；
21. 18 厘米，20 厘米，34 厘米.

习题 3·5 1. $105\sqrt{3}$ 平方厘米； 2. 由 AC 垂直平分 BD，得面积为 $\frac{1}{2}ab$； 3. 25 尺； 5. 两底分别为 $42\sqrt{2}$ 米，$14\sqrt{2}$ 米，高为 $21\sqrt{2}$ 米； 6. 得到平行四边形，面积是原梯形面积的 2 倍.

习题 3·6 1. $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的高相等； 3. 面积扩大 4 倍，9 倍，16 倍； 4. $5\sqrt{2}\,\text{dm}$； 5. 分别是 32 平方厘米，72 平方厘米，128 平方厘米； 9. 9 平方分米，16 平方分米； 10. 6 : 4；
11. 1 : 3； 12. 4 : 6； 13. 2 : 3； 14. 1 : 2； 16 4 : 21 : 56；

复习题三

1. $3\sqrt{101}$ 厘米； 4. 3 : 16； 7. 7500 平方米； 9. 等于对应对角綫平方之比； 11. 6912 平方厘米； 14. 150 平方分米； 15. 546 平方厘米.

第四章

习题 4·1 1. (1) 108°, (2) 120°, (3) 135°, (4) 144°, (5) 150°, (6) 156°； 2. (1) 72°, (2) 60°, (3) 45°, (4) 36°, (5) 30°, (6) 24°.

习题 4·2 7. $R=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+a^2}$； 8. (1) $r=\frac{\sqrt{3}}{6}a$, $R=\frac{\sqrt{3}}{3}a$, (2) $r=\frac{a}{2}$, $R=\frac{\sqrt{2}}{2}a$, (3) $r=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $R=a$.

习题 4·3 1. $\sqrt{3}$ 分米, 2. $2\sqrt{2}$ 分米； 5. $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$； 6. $\frac{R^2}{r^2}Q$； 7. $b=31.5\,\mathrm{mm}$； 8. (1) 正三角形,正方形,正六边形, (2) 475 块； 9. $2(\sqrt{2}+1)$ 厘米； 11. $2\sqrt{3}d, 3\sqrt{3}d^2$； 13. $\frac{\sqrt{3}}{3}R$； 14. $\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})a$； 15. $a_{12}=\sqrt{2-\sqrt{3}}R$, $a_3=\sqrt{3}\,R$； 16. $a_8=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,R$, $a_{16}=\sqrt{2-\sqrt{2+2}}R$； 17. $3R^2$； 19. $n=3$, $r=\sqrt{3}(2+\sqrt{3})R$, $n=4$, $r=(\sqrt{2}+1)R$, $n=6$, $r=R$.

复习题四

1. 等边或等角的多边形内接或外切于一个圆时，一般都是正多边形，但圆内接偶数边等角多边形不一定是正多边形(如矩形)，圆外切偶数边的等边多边形也不一定是正多边形(如菱形)； 2. 5； 3. 边数相同的必相似，周长之比等于边的比(或边心距、半徑的比)，面积之比等于边的平方的比(或周长平方、对应对角綫平方的比)； 4. $\frac{\sqrt{2}}{2}R$； 5. 可以求出这正多边形的边长、边心距和外接圆半徑； 6. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$米； 7. $n=6$ 时, $3\sqrt{3}R$, $\frac{9}{8}\sqrt{3}R^2$, $n=8$ 时, $4\sqrt{2}R$, $\sqrt{2\sqrt{2}}R^2$；

8．$(\sqrt{5}+1)$厘米；　10．周长的和为$4(3+\sqrt{2})a$，面积的和为$7a^2$；
11．$\frac{\sqrt{6}}{3}a$；　12．$4(\sqrt{5}-1)$厘米；　13．$\sqrt{2+\sqrt{2}}a$，$(1+\sqrt{2})a$，$\sqrt{4+2\sqrt{2}}a$；　15．$2\sqrt{6}$ dm；　16．$\frac{a}{3}$；
19．$BD=4.2$ m，$a_8=2.3$ m，$h=2.1$ m；　20．$AL=(\sqrt{2}-1)R$。

第 五 章

习题5·1　1．(1) 62.83米，(2) 219.91厘米；　2．(1) 3.98厘米，(2) 0.76分米；　4．$2\pi R=21.77$ cm，$2\pi r=10.88$ cm；　5．圆周增加15.7厘米，也增加10%；　6．周长增加$2\pi a$；　7．直徑增加31.8厘米；　8．342.8厘米；　9．1.1厘米；　10．60个齿；　11．約为1.257米/秒；　12．212 mm；　14．(1) A輪每分钟轉160次，(2) 皮带长58.5尺；　15．$R=R_1+R_2$。

习题5·2　1．$l=14.8$ cm；　3．23.6厘米；　6．$0.81l$；　7．(1) $\frac{\pi}{3}a$，(2) $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi a$，(3) $\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi a$；　8．圆心角α約为100°；　9．127°20′；　10．約为$\frac{15}{1000}$；　11．$3(2\sqrt{3}-3)l\approx1.392l$。

习题5·3　1．(1) $\frac{3}{4}\pi$，(2) $\frac{5}{12}\pi$，(3) $\frac{3}{8}\pi$，(4) $\frac{1}{3}\pi$，(5) $\frac{1}{8}\pi$，(6) $\frac{\pi}{10}$；　2．(1) 45°，(2) 108°，(3) 150°，(4) 67°30′，(5) 15°，(6) 160°；　3．2厘米；　4．(1) $0.95l$，(2) $0.90l$，(3) $0.83l$；　5．$R=318$ mm；　6．45米；　7．272毫米。

习题5·4　1．3183平方厘米；　2．$2\sqrt{\pi A}$；　3．(1) 314.2平方厘米，(2) 直徑为$4\sqrt{\frac{3}{\pi}}$厘米≈3.91厘米；　4．(1) 增加到2.25倍，(2) 減少到0.25倍，(3) 增加到9倍，(4) 減少到0.0625倍；　5．$\pi(R^2-r^2)$；　6．$\frac{\pi}{2}S$；　8．每平方厘米的筒重0.2 kg；　9．$0.57a^2$；　10．$\frac{3}{4}$；　11．$\frac{8Q}{\pi}\approx2.55Q$；　12．$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi Q\approx1.82Q$；　13．$\frac{\pi}{4}a^2$。

习题5·5　1．$n=\frac{360S}{\pi R^2}$；　3．$R=2.5$ cm 或 12.5 cm；
4．(1) $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)r^2\approx0.215r^2$，(2) $r^2-\frac{\pi}{4}r^2\approx0.215r^2$；
6．窗的面积約为3.7平方米；　7．約697平方厘米；

8. $\frac{1}{6}(2\pi-3\sqrt{3})\,a^2\approx0.18a^2$; 9. $\frac{1}{24}(\pi+6)\,a^2\approx0.38a^2$.

习题 5·6 1. (1) $5.79\,\text{cm}^2$, (2) $18.27\,\text{cm}^2$, (3) $39.2\,\text{cm}^2$, (4) $161.8\,\text{cm}^2$; 2. 88.5 平方厘米; 7. $\frac{\pi}{6}R^2$; 9. $\frac{\pi}{6}R^2$.

复习题五

1. $R=\frac{107}{2(\pi-1)}\,\text{cm}\approx25\,\text{cm}$; 2. 約 94.2 米; 3. 扇形 DCE 的面积 $=\frac{1}{2}$ 扇形 AOB 的面积; 5. 9 秒; 6. $\frac{40}{3}\pi$ 平方米 ≈41.9 平方米; 7. $\frac{1}{18}$ 弧度或 $3.18°$; 8. (1) $0.215r^2$, (2) $0.685r^2$, (3) $0.054r^2$; 9. $\frac{\pi}{8}(a^2+b^2)-\frac{1}{2}ab$; 11. $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}r^2\approx0.705r^2$.

总复习题

5. $AD=CE=\frac{6}{5}\,\text{cm}$, $DE=\frac{12}{5}\,\text{cm}$, $AC=3\text{cm}$; 12. $CD=42\,\text{cm}$;

13. $R=9\,\text{cm}$, $r=2\sqrt{14}\,\text{cm}$; 16. a 边被分得的两綫段为 $\frac{ac}{b+c}$, $\frac{ab}{b+c}$, b 边的两綫段为 $\frac{ab}{a+c}$, $\frac{bc}{a+c}$, c 边的两綫段为 $\frac{ac}{a+b}$, $\frac{bc}{a+b}$;

25. 6 厘米和 8 厘米; 26. $\sqrt{3}$ 厘米, $2\sqrt{3}$ 厘米, $3\sqrt{3}$ 厘米;

30. $(\sqrt{2}+1)d$; 31. $S=96\,\text{cm}^2$, $h=9.6\,\text{cm}$;

33. $10\sqrt{10+2\sqrt{5}}\ \text{cm}^2\approx38\text{cm}^2$; 36. 9π 平方厘米;

37. $\frac{4mnA}{\pi(m^2+n^2)}$.

勘誤: 第 67 頁倒数第 3 行, 应为

(2) $BH\cdot BE+CH\cdot CF=BC^2$

本章提要
复习题五
总复习题
习题答案